2. Etsi funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e^z}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right]$ Laurentin sarja.

(i) pisteessä $z = 0$, kun $|z| > 1$.

Tapa 1:

Ratkaistaan sarjan kertoimet suoraan määritelmästä: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$

Negatiivisten potenssien kertoimiksi saadaan

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^z}{z^2-1}z^{n-1}dz = \frac{1}{4\pi i}\left[\int_S \frac{e^z}{z-1}z^{n-1}dz - \int_S \frac{e^z}{z+1}z^{n-1}dz\right] = \frac{1}{2}[e\,1^{n-1} - e^{-1}(-1)^{n-1}] = \frac{1}{2}[e + (-1)^n e^{-1}]$$

$$= \begin{cases} \frac{(e+e^{-1})}{2} = \cosh 1, \text{ kun n on parillinen} \\ (e-e^{-1})/2 = \sinh 1, \text{ kun n on pariton} \end{cases}$$

Kun taas $n \geq 0$, niin $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^z}{(z^2-1)z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_S g(z)dz$ (1).

Tämä on helpointa laskea Residylauseella: $\int_S g(z)dz = 2\pi i \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k} g(z)$ (2).

Funktiolla g on yksinkertaiset navat ± 1 ja $n+1$ -kertainen napa 0. Vastaavat residyt ovat

$$\operatorname*{Res}_{z=1} g(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)g(z) = \frac{e^1}{(1+1)1^{n+1}} = \frac{e}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} g(z) = \lim_{z\to 1}(z+1)g(z) = \frac{e^{-1}}{(-1-1)(-1)^{n+1}} = \frac{e^{-1}}{2}(-1)^n$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}[z^{n+1}g(z)] = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{e^z}{z^2-1}\right)$$

Sijoittamalla edelliset kaavoihin (1) ja (2) löydetään kerroin a_n: $a_n = \frac{e+(-1)^n e^{-1}}{2} + \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{e^z}{z^2-1}\right)$

Tapa 2:

Kehitetään osoittaja ja nimittäjä sarjoiksi ja kerrotaan sarjat: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ ja $\frac{1}{z^2-1} = \frac{z^{-2}}{1-z^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-2n}$.

Näiden tulo halutaan nyt muotoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.

Kun kerrotaan sarjat termeittäin ja ryhmitellään tulot sopivasti, saadaan

$$a_{-2n}z^{-2n} = \frac{1}{0!}z^{-2n} + \frac{1}{2!}z^2 z^{-2n-2} + \frac{1}{4!}z^4 z^{-2n-4} + \ldots = z^{-2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} \Rightarrow a_{-2n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} = \cosh 1. \qquad (n>0)$$

Vastaavasti $a_{-(2n+1)} = \sinh 1$, $(n>0)$ ja

$$a_{2n} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} = \cosh 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!} \qquad (n \geq 0)$$

$$a_{2n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!} = \sinh 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!} \qquad (n \geq 0)$$

(ii) pisteessä $z = 1$ kun $0 < |z-2| < 2$.

Tapa 1: Jakokulmassa.

Tapa 2:

Lasketaan sarjojen tulo.

Kun merkitään $w = z - 1$, niin $e^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n$, $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{w}$ (sarjassa on vain 1 termi), ja

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+w} = \frac{1/2}{1+\frac{w}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n w^n.$$

KMF H 10, 12.-17.4.1999

Ensimmäisen ja kolmannen sarjan tulo on (Cauchyn kertosäännöllä) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n w^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$, missä

$b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ (3).

Nyt

$$f(z) = \frac{e^z}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right] = \frac{e}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n\right] = \frac{e}{2}\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

missä $a_{-1} = 1$ ja $a_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{2}b_n$, kun $n \geq 0$ ja b_n lasketaan kaavasta (3).

(iii) pisteessä $z = 1$ kun $|z-1| > 2$. Nyt $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+w} = \frac{1/w}{\frac{2}{w}+1} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n w^{-n}$, ja kaksi muuta sarjaa ovat samat kuin kohdassa (ii). Sarjojen tulo lasketaan samaan tapaan kuin edellisissä kohdissa:

$$\frac{e^z}{z+1} = \frac{e}{w}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n w^{-n}\right) = \frac{e}{w}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n w^n$$

$\Rightarrow$

$$b_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-2)^{k+n} = (-2)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-2)^k = (-2)^n e^{-2} \qquad (n \geq 0)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\frac{1}{(k+n)!} = (-2)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k+n}}{(k+n)!} = (-2)^{-n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^m}{m!} - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-2)^m}{m!}\right) = (-2)^{-n}\left(e^{-2} - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-2)^m}{m!}\right)$$

ja edelleen

$$f(z) = \frac{e^z}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right] = \frac{e}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^{n-1} - \frac{1}{w}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n w^n\right] = \frac{e}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^{n-1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n w^{n-1}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n,$$

missä

$$a_n = \begin{cases} (e b_{n+1})/2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} e^{-1}, \text{ kun } n \leq -2 \\ \frac{e}{2(n+1)!} - \frac{e}{2}(-2)^{-n-1}\left(e^{-2} - \sum_{m=0}^{n}\frac{(-2)^m}{m!}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\left[e^{-1} - e\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-2)^m}{m!}\right) - \frac{e(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right] \\ = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\left[e^{-1} - e\left(\sum_{m=0}^{n+1}\frac{(-2)^m}{m!}\right)\right], \text{ kun } n \geq -1. \end{cases}$$