22. SÄHKÖSTATIIKKA

Pääkohdat:
1. Sähkövaraus (säilyminen ja kvantittuminen)
2. Johteet ja eristeet
3. Coulombin laki
4. Superpositio- eli summautumislaki

Sähkö keksittiin hankaussähkönä jo muinaisessa Kreikassa n. 600 eKr sen aiheuttamien voimavaikutuksien vuoksi. Esim. meripihkasauva hangattuna villalla tai turkiksella vetää puoleensa olkia tai höyheniä.
Meripihka, kreik. elektron → engl. electricity.
Luonnon sähköisistä ilmiöistä tunnettiin tietysti myös esim. salamat.

Magneettisia voimavaikutuksia pidettiin aluksi samana ilmiönä, kunnes William Gilbert v. 1600 huomasi, että nämä ilmiöt liittyivät erilaisiin aineisiin, syntymekanismi oli erilainen ja magneetilla oli aina kaksi napaa.

Lähes kaikki arkipäivän ilmiöt: valo, aineiden ominaisuudet, koko kemia, tiedon kulku, jne. ovat perimmäiseltä luonteeltaan sähköisiä (tai sähkömagneettisia). Sähköiset voimat pitävät mm. aineen koossa. Painovoima ja aineen massaan liittyvät ilmiöt ovat ainoa merkittävä poikkeus.

Sähkövaraus on aineen ominaisuus, joka aiheuttaa sähköisiä ilmiöitä. Varaus on sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aiheuttaja ja ilmaisee kappaleen (alkeishiukkasten) kyvyn aiheuttaa ja tuntea sähkömagneettista vuorovaikutusta.

Sähköstatiikka tarkastelee levossa olevien varausten aiheuttamia ilmiöitä.

Sähkömagnetismi tarkastelee sekä sähköisiä että magneettisia (esim. liikkuvien varausten aiheuttamia) ilmiöitä.

22.1. Sähkövaraus, Q, q

Hankaussähköllä voidaan helposti varata esim. korkki tai styroxpalloja, jolloin voimavaikutkset saadaan esille. Charles du Fay päätteli 1733, että on kahdenlaista sähkövarausta, joista samanlaiset hylkivät toisiaan ja erilaiset vetävät toisiaan puoleensa.

Noin 1750 Benjamin Franklin ehdotti, että on vain yhdenlaista varausta ja sen puutetta, ja että hankauksessa tätä varausta siirtyy kappaleesta toiseen. Hän arvasi kuitenkin (positiivisen) varauksen siirtymissuunnan väärin.

Siirtyvä varaus on tavallisesti atomeista irtoavia elektroneja, joista tuli siten varaukseltaan negatiivisia.

Varauksen yksikkö on coulombi, C, jonka suuruus määritellään sähkövirran avulla (1 C = 1 As). 1 C on suhteellisen suuri yksikkö. Esim. hankaussähkövaraukset ovat tyypillisesti luokkaa 10^{-8} C, mutta salama voi purkaa jopa 20 C varauksia.

Varauksen kvantittuminen

1800-luvulla atomikäsitteen (molekyylit, kemia) avulla voitiin olettaa, että varaus esiintyy vain tietynsuuruisina alkeisvarauksina, eli varaus on kvantittunut. R. A. Millikan mittasi alkeisvarauksen v. 1909. Se on

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C},$$

jonka monikertoja $\pm e, \pm 2e, \pm 3e, \ldots$ kaikki esiintyvät vapaat varaukset ovat. Elektronin ja protonin varaukset ovat

$$q_e = -e \quad \text{ja} \quad q_p = +e.$$

(Kvarkkien varaukset ovat $\pm e/3$ tai $\pm 2e/3$!)

Varauksen säilyminen

Empiirisesti (kokeellisesti) on voitu todeta myös varauksen säilymislaki:

Eristetyn systeemin varaus säilyy vakiona

Tämä laki pätee aina, se on yksi fysiikan suurista säilymislaeista. Varauksen säilymislaki on hyvin käyttökelpoinen esim. kemiallisissa- ja ydin- tai alkeishiukkasreaktioissa.

22.2. Johteet ja eristeet

V. 1729 Stephen Gray huomasi, että aine voi tulla varatuksi myös hankaamatta. Johteet, esim. metallit, voivat siirtää (johtaa) varausta esineestä toiseen.

Johdeaineesta valmistetussa kappaleessa varaus jakautuu tasaisesti, mutta ns. eristeessä taas ei. Eristeitä ovat esim. puu, kumi ja lasi. Ns. puolijohteissa on sekä johteiden että eristeiden ominaisuuksia.

Itseasiassa varaus jakautuu tasaisesti myös eristeessä, mutta siihen tarvittava ns. relaksaatioaika voi olla hyvin pitkä: lasi 2 s, meripihka 10^{3} s, polystyreeni 10^{10} s, mutta kupari 10^{-12} s. Atomaarisella tasolla kyse on elektronien liikkuvuudesta. Helposti liikkuvia elektroneja sanotaan johde-elektroneiksi.

22.3. Indusoitu varaus

Esim. kokeita varatulla sauvalla ja metallipalloilla:

22.4. Elektroskooppi

22.5. Coulombin laki

Franklin ja Priestley tekivät kokeita 1760-luvulla varattujen kappaleiden välisistä voimavaikutuksista ja huomasivat samankaltaisuuksia silloin ainoana tunnetun gravitaatiovoiman kanssa. Esim. varatun pallon sisäpuolella ei pallon varauksen aiheuttamia voimia esiinny. Tästä pääteltiin, että varauksen aiheuttaman voimavaikutuksen täytyy olla muotoa

$$1 / r^2.$$

Charles A. Coulomb teki kokeita torsiovaa'alla v. 1785 (siis noin sata vuotta Newtonin esittämän gravitaatiolain jälkeen) ja kykeni osoittamaan, että voimavaikutus on verrannollinen varauksien q ja Q suuruuteen

$$F = k\, q\, Q / r^2, \qquad (22.1)$$

missä k on yksikköjärjestelmästä riippuva vakio. SI-järjestelmässä se on

$$k \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2.$$

Tavallisesti tämä vakio kirjoitetaan muotoon

$$k = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0},$$

missä ε_0 on sähkövakio eli tyhjiön permittiivisyys,

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N m}^2).$$

Koska kyseessä on pallosymmetrinen keskeisvoima, voidaan se kirjoittaa vektorimuodossa

$$\mathbf{F} = \frac{k\, q\, Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \qquad (22.2)$$

missä yksikkövektori $\hat{\mathbf{r}}$ on varauksia yhdistävän suoran suuntainen. Voidaan sopia esim., että $\mathbf{F} = +F\hat{\mathbf{r}}$ tarkoittaa repulsiota ja että $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{r}}$ tarkoittaa attraktiota.

On huomattava, että toistaiseksi varauksien ei ole oletettu olevan liikkeessä. Lisäksi, jos varaukset Q ja q eivät ole pistemäisiä, on voimavaikutusta laskettaessa integroitava lauseke (22.2) varausjakautumien yli. Tämä on sovellus sivulla 8 esitettävästä superpositioperiaatteesta.

Pallosymmetristen varausjakautumien tapauksessa integroinnista saadaan tulos, jonka mukaan voimavaikutuksien kannalta voidaan varauksen ajatella keskittyneen pistemäiseksi pallon keskipisteeseen ja että varatun pallokuoren sisällä voimavaikutukset kumoavat toisensa. Tämähän pätee myös gravitaatiovoimalle.

Esim. 22.3. Elektronin ja protonin etäisyys vetyatomissa on $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m (keskimäärin). Vertaile hiukkasten välisiä gravitaatio- ja sähköstaattisia voimia. Mikä olisi elektronin klassillinen keskeiskiihtyvyys?

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²
$m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
$M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
$1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \times 10^{+9}$ Nm²/C²
$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

Superpositioperiaate

Useamman varauksen aiheuttama yhteinen sähköstaattinen voima on yksinkertaisesti yksittäisten varauksien aiheuttamien voimien (22.2) vektorisumma

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1N}. \quad (22.3)$$

Esim. Kaksi yhtäsuurta pistevarausta, $+10\ \mu$C, ovat samalla korkeudella ja 4 cm etäisyydellä toisistaan. Pieni massa halutaisiin asettaa 1 cm alemmaksi ja yhtä etäälle em. varauksista, varaamalla se negatiivisella varauksella siten, että sähköstaattiset voimat ja maanvetovoima ovat tasapainossa. Mikä olisi $|m/q|$ oltava?

$g = 9.81$ m/s²
$k = 9.0 \times 10^9$ Nm²/C²

23. SÄHKÖKENTTÄ

Pääkohdat:
1. Sähkökenttä ja kenttäviivat
2. Staattinen sähkökenttä johteessa ja sen pinnalla
3. Varausten liike staattisessa sähkökentässä
4. Sähköinen dipoli

Sähköstaattisen voiman, samoin kuin gravitaatiovoimankin, välittymismekanismi oli ollut keksijöilleen ongelma. Nykyisin ajatellaan, että nämä voimat vaikuttavat kenttien välityksellä.

23.1. Sähkökenttä

Sähkövaraus siis muodostaa Coulombin laista laskettavissa olevan staattisen (vektori)voimakentän, sähkökentän, jonka toinen varaus kokee voimavaikutuksena. Sähkökenttä toimii siis varauksien välisen voiman välittäjänä.

Coulombin lain mukaisen varaukseen q_t kohdistuvan voimavaikutuksen avulla määritellään sähköinen kenttävoimakkuus

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} / q_t, \qquad (23.1)$$

eli sähkökenttä missä tahansa paikassa. Sähkökentän yksikkö SI-järjestelmässä on N/C (= V/m).

Coulombin lain (22.2) mukaan saadaan

$$\mathbf{E} = \frac{k\,Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,, \qquad (23.2)$$

ja

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} \qquad (23.3)$$

mille tahansa varaukselle q.

Huomaa jälleen samankaltaisuus gravitaatio voiman kanssa, jolle $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$ ja $[\mathbf{g}]$ = N/kg. Huomaa myös, että sähkökenttä, samoin kuin voima ja kiihtyvyyskin, on vektorisuure, jonka ilmoittamiseen tarvitaan kolme komponenttia.

On huomattava, että kenttä $\mathbf{E}$ on olemassa varauksesta q riippumatta ja että varausta q ei sisällytetä varaukseen Q. Sen sijaan, jos $Q = \Sigma_i Q_i$, niin varauksien Q_i aiheuttamien voimavektorien $\mathbf{F}_i$ superpositio periaatteesta (22.3) seuraa yhtälön (23.3) avulla kenttien superpositioperiaate

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_N = \Sigma_i\,\mathbf{E}_i. \qquad (23.4)$$

Sähkökenttä muuttuu sen aiheuttavan varauksen paikan tai suuruuden muuttuessa. Se tapahtuu kuitenkin pienellä viiveellä, koska signaalin kulkunopeus on äärellinen.

23.2. Kenttäviivat

Sähkökenttää vektorisuureena voidaan periaatteessa havainnollistaa kussakin pisteessä siihen piirretyllä nuolella.

Sähkökenttää (ja vektorikenttiä yleisestikin) voidaan kuitenkin havainnollistaa paremmin ns. kenttäviivoilla, jotka piirretään siten, että

a) kussakin pisteessä kenttä on kenttäviivan tangentin suuntainen,

b) kenttäviivojen tiheys on verrannollinen kentän voimakkuuteen ja

c) piirretään nuolenkärjet osoittamaan kentän suuntaan.

Seurauksia:

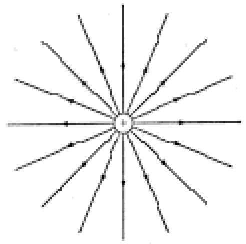
d) a-kohta ⇒ Kenttäviivat eivät leikkaa toisiaan,

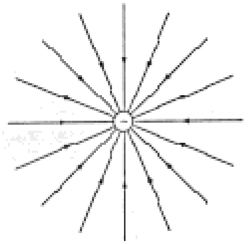
e) c-kohta ⇒ kenttäviivat alkavat positiivisesta varauksesta ja päättyvät negatiiviseen varaukseen ja

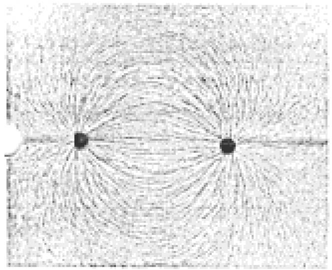
f) b-kohta ⇒ varauksesta lähtevien tai siihen saapuvien kenttäviivojen lukumäärä on verrannollinen varauksen suuruuteen.

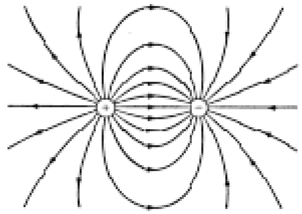
Selitä miksi!

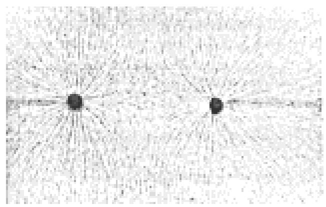
Esimerkkejä kenttäviivoista

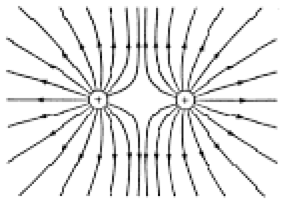


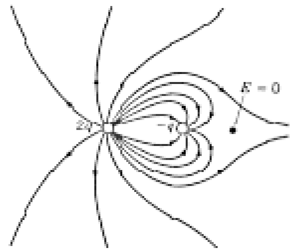












Esim. 23.3. Kahden pistevarauksen $2q$ ja $-q$ muodostaman systeemin kenttäviivat.

23.3 Sähkökenttä ja johteet

Kun johde tuodaan sähkökenttään, niin varauksenkuljettajat (metallissa elektronit) asettuvat johteen pinnalle siten, että sähkökenttä johteen sisällä häviää. Jos kenttä johteen sisällä ei olisi nolla, aiheuttaisi se varauksenkuljettajien liikettä siten, että kenttä vähenisi. Siten siis

staattisessa tilanteessa makroskooppinen sähkökenttä homogeenisessa johteessa häviää.

Samoin voidaan päätellä, että

kaikkialla johteen pinnalla sähkökenttä on staattisessa tilanteessa kohtisuorassa pintaa vastaan,

koska muussa tapauksessa kentän pinnan suuntainen komponentti aiheuttaisi varauksenkuljettajien liikettä.

23.4 Varauksen liike staattisessa sähkökentässä

Jos m-massaisen hiukkasen varaus on q sähkökentässä $\mathbf{E}$, tulee hiukkasen liikeyhtälöksi $m\,\mathbf{a} = q\,\mathbf{E}$, josta seuraa kiihtyvyys

$$\mathbf{a} = q\,\mathbf{E} / m. \tag{23.6}$$

Jos kenttä on hiukkasen radalla vakio, on myös hiukkasen kiihtyvyys vakio.

23.5. Jatkuvat varausjakautumat

Jos varaus Q ei ole pistemäinen, vaan niin sanottu varausjakauma $q(\mathbf{r})$, jolle $Q = \int dq = 1/V \int_V q(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$, niin tällöin jokaisen infinitesimaalisen varauksen dq osuus sähköstaattiseen voimaan tai sähkökenttään voidaan kirjoittaa erikseen ja kokonaisvaikutus saadaan integroimalla koko varausjakautuman yli. Kokonaiskentän infinitesimaalinen osuus varauselementistä dq on

$$d\mathbf{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{23.7}$$

ja kokonaiskentäksi $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$ tulee

$$\mathbf{E} = k \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,dq \tag{23.8}$$

Tämän laskemiseksi on varausjakauman paikkariippuvuus $q(\mathbf{r})$ tunnettava.

Esim. 23.6: Varaus on jakautunut tasaisesti ohueen L:n mittaiseen sauvaan, jonka kokonaisvaraus Q. Mikä on sähkökenttä sauvan akselilla etäisyydellä a mitattuna sauvan toisesta päästä?

Esim. Varaus Q on jakautunut tasaisesti ohueen R-säteiseen renkaaseen. Mikä on sähkökenttä renkaan akselilla?

Esim. 23.7: Varaus on jakautunut tasaisesti ohueen äärettömän pitkään johtimeen, varaustiheys λ (C/m). Mikä on sen voimavaikutus varaukseen q, joka on johtimesta etäisyydellä x?

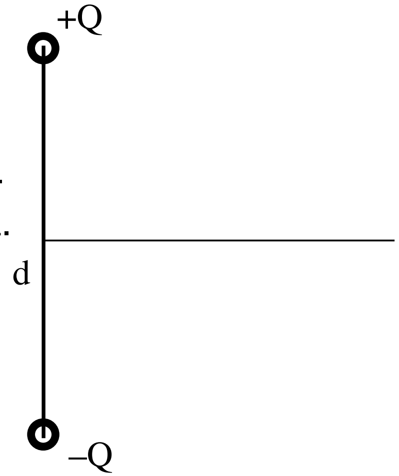
Esim. 23.9: Mikä on ohuen, äärettömän ja tasaisesti varautuneen (varaus σ (C/m^2)) tason muodostama sähkökenttä? Entä mikä on kenttä kahden yhdensuuntaisen edellämainitun tason välissä, kun pintavaraukset ovat $+\sigma$ ja $-\sigma$.

23.6. Dipoli

Pari yhtäsuuria, mutta vastakkaismerkkisiä, varauksia tietyllä etäisyydellä toisistaan muodostavat sähköisen dipolin. Esim. hankaussähkövarauksilla voidaan muodostaa dipoli tai useimmat molekyylit, kuten NaCl ovat dipoleja. Tällaisten pysyvien dipolien lisäksi sähkökenttä voi saada aikaan indusoidun dipolin esim. neutraalista atomista. Indusoitu dipoli häviää, kun kenttä poistetaan.

Dipolin kenttä

Tarkastellaan dipolia, jonka muodostavat etäisyydellä $d = 2a$ olevat varaukset $+Q$ ja $-Q$ oheisen kuvan mukaisesti ja määrätään sen kenttä dipolin kohtisuoralla puolittajalla.



Määritellään sähköinen dipolimomentti

$$\mathbf{p} = Q\,\mathbf{d}, \qquad (23.12)$$

missä $\mathbf{d}$ on dipolin muodostavia varauksia yhdistävä vektori $-Q \rightarrow +Q$.

Kaukana dipolista, kun $r >> a$ ja $(r^2 + a^2)^{3/2} \rightarrow r^3$, tulee kentäksi dipolin kohtisuoralla puolittajalla

$$E = k\,p / r^3. \qquad (r >> d) \qquad (23.13)$$

Dipolin akselilla kentäksi tulee taas

$$E = 2\,k\,p / r^3, \qquad (r >> d) \qquad (23.14)$$

koska

Momentti homogeenisessa kentässä

Vaikka neutraaliin dipoliin ei homogeenisessa sähkökentässä kohdistukaan nettovoimaa, kohdistuu siihen kuitenkin oheisen kuvan mukaisesti voimapari, joka aiheuttaa (vääntö)momentin

$$\tau = 2\,(qE)\,(d/2 \sin\theta) = p\,E \sin\theta, \qquad (23.15)$$

jonka vektoriesitys

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (23.16)$$

ilmoittaa myös momenttivektorin suunnan.

Potentiaalienergia

Momentti, joka liittyy dipolin pyörimisliikkeeseen sähkökentässä, tekee työtä. Ulkoinen työ $W = \int (-\tau)\, d\theta$ (vrt. $W = \int (-F)\, ds$)

$$W_{EXT} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p\, E \sin\theta\, d\theta = p\, E\, (-\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

muuttuu dipolin potentiaalienergiaksi ΔU. Kun potentiaalienergian "nollakohdaksi" valitaan dipolin ja kentän välinen kulma $\theta = \pi/2$; eli $U = 0$, kun $\cos\theta = 0$, voidaan sähköisen dipolin $\mathbf{p}$ potentiaalienergia ulkoisessa sähkökentässä $\mathbf{E}$ kirjoittaa muotoon

$$U = -p\, E \cos\theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (23.17)$$

Potentiaalienergia kulman θ funktiona on esitetty oheisessa kuvassa.

Dipoli, jolla on hitausmomentti, käyttäytyy sähkökentässä matemaattisen heilurin tavoin.

Vesimolekyylin suhteellisen suurella dipolimomentilla (6.2×10^{-30} Cm) on tärkeä merkitys veden ominaisuuksiin liuottimena ja esim. mikroaaltouunin toimintaperiaatteessa.

Esim. Laske potentiaalienergioiden ero, kun vesimolekyylin dipolimomentti on orientoitunut kentän $E = 2.0 \times 10^5$ N/C suuntaisesti tai vastakkaissuuntaisesti.

23.7. Dipoli epähomogeenisessa sähkökentässä

Huolimatta siitä, että dipoli on neutraali, epähomogeenisessa sähkökentässä dipoliin voi kohdistua myös nettovoima.

Dipolin muodostama sähkökenttä, yht. (23.13–14), on epähomogeeninen ja atomien (tai molekyylien) välinen ns. van der Waals -voima tai -vuorovaikutus on seurausta atomeihin indusoitujen dipolien vuorovaikutuksista.

23.8. Millikanin koe

R. A. Millikan suoritti v. 1909 öljypisarakokeen, jolla hän onnistui osoittamaan, että varaus esiintyy vain alkeisvarauksen $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C monikertoina.

24. GAUSSIN LAKI

Pääkohdat:

1. Sähkökentän vuo
2. Gaussin laki: vuo–varaus-riippuvuus
3. Johdekappaleen varaus on jakautunut johdekappaleen pinnalle

Sähkökenttä voidaan aina määrätä varausjakautumasta Coulombin lain avulla, vaikkakin varausjakautuman yli integrointi voi osoittautua työlääksi. Matemaatikko Carl F. Gauss (1777–1855) määritteli sähkökentän voimaviivojen avulla kvantitatiivisen käsitteen: sähkökentän vuo, jonka riippuvuutta sen aiheuttavasta varauksesta kutsutaan Gaussin laiksi. Gaussin laki on yleisempi kuin Coulombin laki, joka rajoittuu sähköstatiikkaan.

24.1. Sähkökentän vuo

Tarkastellaan sähkökentän $\mathbf{E}$ voimaviivoja vastaan kohtisuoraa pintaa, jonka pinta-ala on A, ja määritellään pinnan läpäisevä sähkökentän vuo (electric flux)

$$\Phi_E = E\,A.$$

Kentän vuon yksiköksi SI-järjestelmässä tulee Nm^2/C.

Mikäli pinta ei ole kohtisuorassa kenttää vastaan, eli $\mathbf{A}$-vektori ei ole yhdensuuntainen $\mathbf{E}$-vektorin kanssa, on vuota määrättäessä tarkasteltava pinnan projektiota kohtisuoraan kenttää vastaan. Projektion pinta-ala $A_n = A\cos\theta$, missä θ on $\mathbf{A}$- ja $\mathbf{E}$-vektoreiden välinen kulma. Niinpä vuo $\Phi_E = E\,A_n$ $(= E_n\,A) = E\,A\cos\theta$ voidaankin kirjoittaa muotoon

$$\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A}, \qquad (24.1)$$

kun $\mathbf{E}$ on homogeeninen tarkasteltavan pinnan alueella.

Mikäli kenttä ei ole homogeeninen tarkastellaan infinitesimaalisia pintaelementtejä $d\mathbf{A}$, joille $d\Phi_E = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ ja

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}, \qquad (24.2)$$

missä pintaintegraali määrätään tarkasteltavan pinnan A yli.

Yleisesti käytössä on myös suure sähkövuon tiheys $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$, jonka yksikkö on C/m^2 (ja sähkövuo $\Phi_D = \mathbf{D}\cdot\mathbf{A}$).

24.2. Gaussin laki

Tarkastellaan pistevarausta Q ja r -säteistä pallopintaa sen ympärillä. Nyt $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ $= E\,dA$, koska $\mathbf{E} \parallel \mathbf{A}$ pallon pinnalla ja

$$\Phi_E = \oint E\,dA = E\oint dA = E\,4\pi r^2.$$

Koska $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ saadaan

$$\Phi_E = Q/\varepsilon_0.$$

Vuo on siis sopivasti normitettu kenttäviivojen lukumäärä.

Suljettua pintaa, jonka yli integrointi suoritetaan sanotaan Gaussin pinnaksi. Kuten em. tapauksessa nähdään varauksen Q sisältävän suljetun pinnan muodolla ei ole merkitystä vuota määrättäessä, koska pinnan läpäisevien kenttäviivojen lukumäärä riippuu vain varauksesta Q.

Siten saadaan Gaussin laki

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,} \qquad (24.3)$$

missä pintaintegraali määrätään varauksen Q sulkevan suljetun pinnan yli, eli

Sähkökentän nettovuo varauksen Q sulkevan suljetun pinnan läpi on Q/ε_0.

Suljettu Gaussin pinta on syytä valita käyttäen tarkasteltavan kohteen varausjakautuman symmetriaa hyväksi ja/tai siten, että se sisältää osia, joille $\mathbf{E}\perp\mathbf{A}$ tai $\mathbf{E}\parallel\mathbf{A}$.

<u>**Esim. 24.1:**</u> Varatun (Q) pallokuoren kenttä kuoren ulko- ja sisäpuolella.

Esim. 24.2: Homogeenisesti varautuneen (ρ) eristepallon, säde R, kenttä pinnan ulko- ja sisäpuolella.

Esim. 24.3: Äärettömän pitkän varatun (λ) johtimen kenttä.

Esim. 24.4: Varatun tason (σ) sähkökenttä.

24.3. Johteet

Gaussin lain avulla on helppo päätellä, että staattisessa tilanteessa johdekappaleen koko varaus on jakautunut johteen pinnalle.

Mille tahansa kokonaan johdekappaleen sisässä olevalle Gaussin pinnalle saadaan Gaussin laista $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q / \varepsilon_0$ ja toisaalta johteessa $\mathbf{E} \equiv 0$, koska muuten tapahtuisi varauksen liikettä. Tästä seuraa, että $Q = 0$, mikä on mahdollista vain, jos nettovarauksia ei esiinny johdekappaleen sisällä, vaan ne ovat jakautuneet johdekappaleen pinnalle.

Onkalo johdekappaleessa

Koska kokonaan johteessa olevalla Gaussin pinnalla, joka kuitenkin sisältää onkalon ja varauksen Q, $\mathbf{E} \equiv 0$, niin nettovaraus Gaussin pinnan sisäpuolella on nolla. Siten siis varaus Q onkalossa jodekappaleen sisällä indusoi johdekappaleen ulkopinnalle varauksen Q ja onkalon sisäpinnalle varauksen $-Q$.

25. SÄHKÖKENTÄN POTENTIAALI

Pääkohdat:

1. Sähkökentän potentiaalin määritelmä
2. Sähkökentän ja sen potentiaalin välinen yhteys
3. Sähköstaattinen potentiaalienergia
4. Tasapotentiaalipinnat

Sähköstaattisen voiman (tai kentän) muoto on sama kuin gravitaatiokentän muoto, $1 / r^2$. Siten sähkökentän potentiaali voidaan määritellä samoin kuin gravitaatiopotentiaali ja energian säilymislakia voidaan soveltaa samalla tavoin.

Skalaarisen potentiaalifunktion määrääminen ja soveltaminen on usein lisäksi helpompaa kuin sitä vastaavan voimakentän, joka taas on vektorisuure.

25.1. Sähkökentän potentiaali

Kun ulkoinen voima $\mathbf{F}_{EXT}$ siirtää kappaleen lähtöpaikasta i paikkaan f (vakionopeudella) kentän voimavaikutusta vastaan, tekee se työn $Fh = qEh$ (tai mgh)

$$W_{EXT} = \Delta U = U_f - U_i, \qquad (25.1)$$

missä U_i ja U_f ovat kappaleen paikkoihin i ja f liittyvät potentiaalienergiat.

Varauksesta (massasta) riippumaton sähkökentän (gravitaatiokentän) potentiaalifunktio saadaan nyt jakamalla tehty työ varauksella (massalla). Tällöin potentiaalifunktio riippuu ainoastaan aiheuttajastaan eikä potentiaalissa olevasta (testi)varauksesta (massasta).

Kun varaus q liikkuu sähkökentässä pisteestä toiseen, määritellään näiden pisteiden välinen potentiaaliero eli jännite

$$\Delta V = \Delta U / q , \qquad (25.2)$$

missä ΔU on liikkuttamiseen tarvittu potentiaalienergian lisäys. Sähkökentän potentiaalin ja jännitteen SI-yksikkö on voltti, 1 V = 1 J/C. Yhtälön (25.1) mukaan

$$W_{EXT} = q\,\Delta V = q\,(V_f - V_i). \qquad (25.3)$$

Tavallisesti ainoastaan potentiaaliero on fysikaalisesti merkitsevä, jolloin potentiaaliasteikon nollakohta voidaan vapaasti kiinnittää esim. maan potentiaaliin. Tällöin

pisteen potentiaali on se ulkoinen työ varausyksikköä kohti, joka tarvitaan positiivisen testivarauksen siirtämiseen nollapotentiaalista ko. pisteeseen.

Huomaa merkki!

Kun sähkökentän konservatiivinen voima varaukseen q on $\mathbf{F}_c = q\,\mathbf{E}$, on infinitesimaaliselle siirrokselle $d\mathbf{s}$ potentiaalienergian muutos

$$dU = -\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = -q\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Siten

$$dV = dU / q = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (25.4)$$

ja

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (25.5)$$

Siis koska sähkökenttä on konservatiivinen, ei integraalin arvo riipu tiestä, vaan ainoastaan pisteistä A ja B.

25.2. Homogeenisen kentän potentiaali

Jos sähkökenttä on vakio $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E} \cdot \int d\mathbf{s} = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$ ja

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}. \qquad (25.6a)$$

Jos siirroksen komponentti kentän suuntaan on $d = \Delta s$ cosθ, niin

$$\Delta V = E\,d. \qquad (25.6c)$$

Sähkökentän yksikkönä on usein kätevää käyttää V/m (= N/C).

<u>Tasapotentiaalipinta</u>

Tasapotentiaalipinnan muodostavat pisteet, joiden potentiaali on sama. Siten jos varausta siirretään tasapotentiaalipintaa pitkin, $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = dV = 0$, josta voidaan päätellä, että $\mathbf{E}$-vektori on kohtisuorassa tasapotentiaalipintaa vastaan.

Varauksen liike kentässä

Energiaperiaate $\Delta K + \Delta U = 0$ varaukselle q voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Delta K + q\,\Delta V = 0\,. \qquad (25.7)$$

Siis jos positiivinen varaus q "laskee alamäkeä" kentässä, $\Delta V < 0$, niin sen kineettinen energia kasvaa, $\Delta K > 0$.

Alkeisvarauksen e siirtyessä potentiaalin 1 V yli, tarvitaan tai vapautuu energiaa $q\,\Delta V$ = e · V = 1.602×10^{-19} C · 1V = 1.602×10^{-19} J. Tämä onkin eräs käytetyistä energian yksiköistä, ns. elektronivoltti,

$$\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}. \qquad (25.8)$$

Esim. vetymolekyylin sidosenergia on noin 4.5 eV. Ydin- ja hiukkasfysiikassa käytetään usein yksiköitä MeV ja GeV.

Esim. 25.1: Protoni, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, saapuu homogeeniseen sähkökenttään $E = 3 \times 10^5$ V/m alkunopeudella $v_i = 5 \times 10^6$ m/s. Mikä on protonin nopeus v_f, kun se on liikkunut $d = 20$ cm kenttäviivojen suuntaan?

25.3. Pistevarauksen potentiaali

Pistevarauksen sähkökenttä on

$$\mathbf{E} = k\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,.$$

Kenttä on radiaalinen, joten

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r\,dr$ ja siten

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int_A^B E_r\,dr =$$

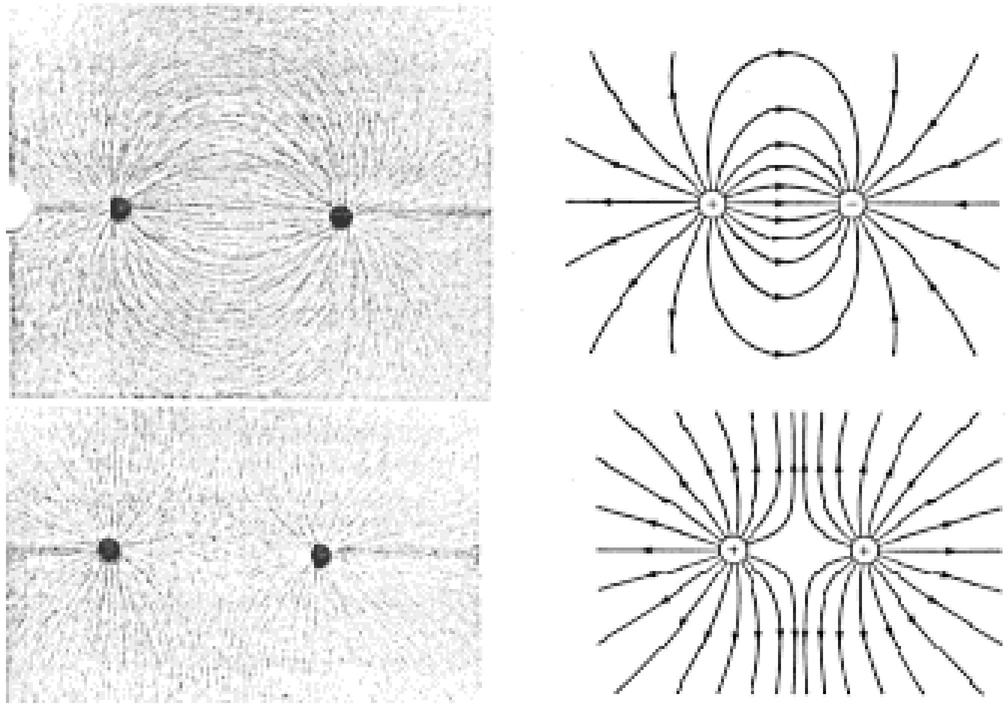
Usean pistevarauksen sähköinen potentiaali

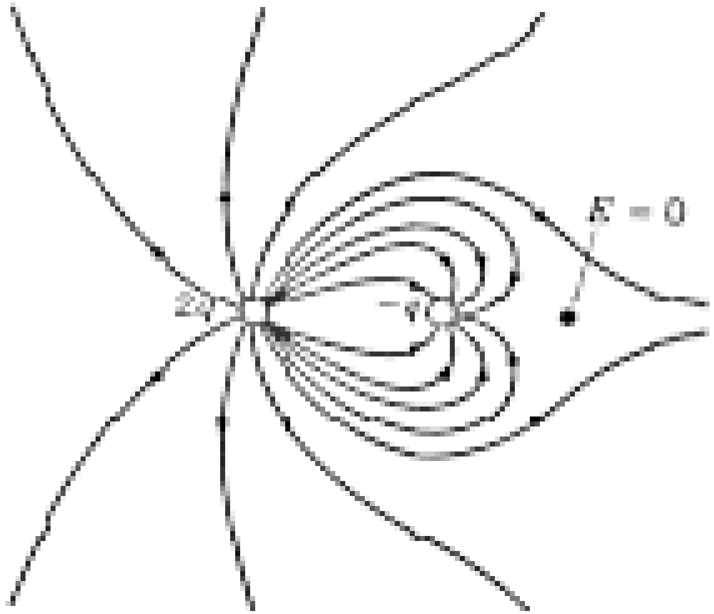
Koska usean (piste)varauksen muodostama sähkökenttä saadaan superpositiona yksittäisten varausten kentistä, pätee superpositioperiaate myös sähköiselle potentiaalille ja

$$V = \sum_i k \frac{Q_i}{r_i} . \qquad (25.10)$$

Esim. Kahden pistevarauksen potentiaali.

Esimerkkejä (kenttäviivoista ja) tasapotentiaalipinnoista





Pistevarausten välinen potentiaalienergia

Potentiaalissa V varauksen q potentiaalienergia on

$$U = q\,V. \tag{25.11}$$

Jos potentiaali on toisen pistevarauksen aiheuttama, $V = kQ/r$, niin

$$\boxed{U = k\,\frac{qQ}{r}\,,} \tag{25.12}$$

missä r on varauksien välinen etäisyys. Potentiaalienergian nollatasoksi tulee $U(\infty)$, koska on valittu $V(\infty) = 0$.

Esim. 25.3: V. 1913 Niels Bohr ehdotti vetyatomin mallia, jossa elektroni kiertää protonia pitkin stationääristä ympyrärataa, jonka säde $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m. Laske tällaisen vetyatomin kokonaisenergia.

25.4. Sähkökenttä johdettuna potentiaalifunktiosta

Konservatiivinen voima voidaan määrätä potentiaalienergiafunktiostaan $F_x = -\,dU/dx$, koska $dU = -\,F_x\,dx$ eli $\Delta U = -\int F_x\,dx$. Samoin, koska $dV = -\,E_s\,ds$,

$$E_s = -\,\frac{dV}{ds}\,, \tag{25.13}$$

missä elementin ds suunta voi olla mikä tahansa ja E_s on sähkökentän komponentti juuri tähän suuntaan.

Koska $\mathbf{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath} + E_z\,\hat{k}$, $d\mathbf{s} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$ ja $dV = -\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\,(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz)$, voidaan sähkökentän jokainen komponentti laskea erikseen

$$E_x = -\,\frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad E_y = -\,\frac{\partial V}{\partial y}\quad \text{ja}\quad E_z = -\,\frac{\partial V}{\partial z}$$

ja

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right) = -\,\nabla\,V\,.} \tag{25.14}$$

Sähkökenttä on siis potentiaalifunktionsa negatiivinen derivaatta. Skalaarifunktion V 3-ulotteista derivaattaa kutsutaan gradientiksi ja sitä merkitään grad V tai ∇ V. Se on vektorisuure, joka osoittaa suunnan, johon potentiaalifunktio V kasvaa nopeimmin, ja sen itseisarvo antaa kasvun suuruuden. Kenttävektori on taas suuntaan, johon potentiaalifunktio pienenee nopeimmin, ja $|\nabla V| = E$.

<u>Esim. 25.4:</u> Pistevarauksen Q potentiaali on $V = k\,Q/r$.
Määrää (a) sähkökentän radiaalikomponentti E_r,
(b) x-komponentti E_x ja (c) $\mathbf{E}$.

25.5. Jatkuvat varausjakautumat

Jatkuvan varausjakautuman potentiaali voidaan määrätä lausekkeesta

$$dV = k\,\frac{dq}{r}$$

integroimalla yli koko varausjakautuman

$$V = k \int_q \frac{dq}{r}\,. \qquad (25.15)$$

Tällöin potentiaalin nollareferenssiksi tulee potentiaalifunktion arvo äärettömän kaukana.

Toisaalta, mikäli varausjakautuman sähkökenttä $\mathbf{E}$ tunnetaan, esim. Gaussin lain perusteella, saadaan potentiaali V pisteessä P lausekkeesta

$$V - V_0 = -\int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}\,, \qquad (25.16)$$

missä referenssipiste 0 ja sen potentiaali V_0 voidaan valita vapaasti, esim. $V_0(\infty) = 0$, kuten edellä.

Esim. 25.5: Ohuella kiekolla, jonka säde on a, on pintavaraus σ. Mikä on potentiaali kiekon akselilla etäisyydellä z kiekon keskipisteestä? Tarkastele myös rajatapauksia $z >> a$ ja $z << a$.

Esim. 25.6: Varaus Q on jakautunut tasaisesti ohuelle pallokuorelle, jonka säde on R. Määrää potentiaali.

Esim. Määrää homogeenisesti varatun pallon potentiaali, kun pallon kokonaisvaraus on Q.

Esim. 25.7: Metallipallo, jonka säde on R varataan $0 \rightarrow Q$. Laske metallipallon potentiaalienergia eli varaamiseen tarvittu energia.

25.6. Johteet

Koska staattisessa tilanteessa johteen sisäpuolella kaikkialla on $\mathbf{E} \equiv 0$,

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

ja $V_B = V_A$ kaikille pisteille A ja B.

Siis

kaikissa pisteissä johteen sisällä ja pinnoilla on staattisessa tilanteessa sama potentiaali.

Koska siis pintaa pitkin $dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, voidaan päätellä, että (staattisessa tilanteessa) sähkökenttä on kohtisuorassa pintaa vastaan. Tämänhän päättelimme jo aikaisemmin suoraan siitä, että johteen sisällä $\mathbf{E} \equiv 0$. (Mutta pinnalla yleisesti $\mathbf{E} \neq 0$)

Tarkastellaan nyt kahta varattua metallipalloa, säteet R_1 ja R_2, jotka ovat kaukana toisistaan, mutta sähköisesti yhdistetty toisiinsa johtimella. Koska pallojen potentiaali kQ/R on nyt sama,

$$Q_1 / R_1 = Q_2 / R_2$$

ja koska varaus on jakautunut kokonaisuudessaan pintavarauksiksi σ ja $Q = 4\pi R^2 \sigma$ seuraa

$$\sigma_1 / \sigma_2 = R_2 / R_1 . \qquad (25.18)$$

Siten siis varaustiheys pallon pinnalla on kääntäen verrannollinen pallon säteeseen, $\sigma \propto 1/R$.

Gaussin lakia soveltamalla, esim. 24.4, totesimme, että lähellä ohutta varattua kaksipuolista pintaa $E = \sigma / 2\varepsilon_0$. Tämä pätee kaarevallekin pinnalle, kun sitä tarkastellaan niin läheltä, että kaarevuus on pientä. Tällaisella metallipinnalla, koska se ei ole kaksipuolinen, $E = \sigma / \varepsilon_0$, ja siksi myös $E \propto 1/R$.

Tämä voidaan yleistää myös yhdelle metallikappaleelle, jossa on osia, joiden pintojen kaarevuussäteet R vaihtelevat. Siten voidaan päätellä, että metallikappaleen pintavaraus ei ole tasainen ja että sähkökenttä on pinnalla suurin siellä missä pinnan kaarevuussäde on pienin, esim. neulankärki. Potentiaali sen sijaan on vakio kaikkialla metallikappaleessa.

Näiden syiden vuoksi pyritään korkeajännitelaitteissa, esim. kytkimien kontaktipinnoissa, välttämään teräviä osia, jotka voisivat aiheuttaa helpommin ns. läpilyöntejä. Kuivassa ilmassa läpilyönti tapahtuu sähkökentän arvolla noin 3×10^6 V/m.

Esim. Jos neulankärjen kaarevuussäde on 0.1 mm, kuinka suuri potentiaali tarvitaan synnyttämään sähkökenttä 3×10^6 V/m kärjen pinnalle?

Esim. Määrää dipolin sähköinen potentiaali ja sähkökenttä kaukana dipolista. Vertaa kentän lausekkeita yhtälöihin (23.13) ja (23.14).

Valokopiokone

Valokopiokoneen sähköstaattisen toimintaperiaatteen keksi C.F. Coulson v. 1935 ja ensimmäisen kaupallisen tuotteen toi markkinoille Xerox v. 1948. Laser-tulostimet toimivat samalla periaatteella.

Toiminta perustuu sellaisen eristeaineen käyttöön, joka tulee sähköä johtavaksi valon vaikutuksesta, esim. ZnO muoviin sekoitettuna. Tällaista valolla aktivoitavaa johdeainetta on ohut kerros ($25\ \mu$m) johtavalla levyllä tai rummulla. Toimintamekanismi on seuraava:

1. Levyn pintakerros varataan positiivisesti esim. korkealla jännitteellä.

2. Levyn pinnalle valotetaan kopioitava kuva optisesti, jolloin staattinen positiivinen varaus purkautuu kuvan valkeita osia vastaavilta alueilta, mutta säilyy mustia osia vastaavilta alueilla. Siten levylle syntyy varausten muodostama kuva.

3. Levy altistetaan negatiivisesti varatulle mustejauheelle, jota tarttuu levylle kuvan mustia osia vastaaviin alueisiin. Siten levylle syntyy mustejauheen muodostama kuva.

4. Paperi, joka voi olla positiivisesti varattu, painetaan levyn pintaa vasten, jolloin kuva siirtyy paperille.

5. Kuva kiinnitetään paperille lämpökäsittelyllä.

26. KONDENSAATTORIT JA ERISTEET

Pääkohdat:

1. Kapasitanssin määritelmä
2. Kondensaattorien sarjaan ja rinnan kytkennät
3. a) Kondensaattorin energia
   b) Sähkökentän energia
4. Eristeaineen vaikutus kondensaattorissa

Aluksi staattisen sähkövarauksen purkautumisen ajateltiin olevan eräänlaista "sähkönesteen" höyrystymistä ja sen säilyttämisen eräänlaista kondensaatiota → kondensaattori (engl. capacitor). Ensimmäisen kondensaattorin keksi saksalainen pappi E.G. von Kleist v. 1745.

26.1. Kapasitanssi

Yksinkertaisen kondensaattorin muodostavat kaksi johdekappaletta, elektrodia, joiden välissä voi olla eristettä. Kun elektrodien, esim. levyjen, välille kytketään potentiaaliero eli jännite V, tulevat ne varatuiksi. Sähköstaattiset varaukset säilyvät, vaikka jännitelähde poistettaisiinkin.

Kondensaattorin varaus on verrannollinen jännitteeseen V,

$$Q = C V , \qquad (26.1)$$

missä verrannollisuuskerrointa C kutsutaan kondensaattorin kapasitanssiksi. Kapasitanssi kuvaa kondensaattorin kykyä kerätä varausta jänniteyksikköä kohti. Kapasitanssin

$$C = Q / V \qquad (26.2)$$

SI-yksikkö on faradi, 1 F = 1 C/V. Kapasitanssi riippuu kondensaattorin geometriasta ja levyjen välissä olevasta eristeaineesta.

Tasolevykondensaattori

Tavallisin kondensaattori muodostuu kahdesta tasolevystä, jotka on asetettu lähelle toisiaan, esim. etäisyydelle d. Tällöin sähkökenttä levyjen välissä on [(23.10) tai (24.8)]

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

ja koska $E = V / d$, tulee kapasitanssiksi $(C = Q/V)$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} . \qquad (26.3)$$

Kapasitanssi on siis verrannollinen levyjen pinta-alaan ja kääntäen verrannollinen niiden etäisyyteen, koska $C \propto Q \propto E \propto 1/d$, kun V on vakio.

Esim. 26.1: Mikä olisi 1F tasolevykondensaattorin levyjen pinta-ala, jos niiden etäisyys olisi 1mm?

Esim. 26.3: Mikä on eristetyn R-säteisen metallipallon kapasitanssi? (Pallon voidaan katsoa muodostavan kondensaattorin hyvin kaukana olevan "maan" kanssa)

Esim. 26.4: Pallokondensaattori koostuu kahdesta sisäkkäisestä ja samankeskeisestä johtavasta pallokuoresta, joiden säteet ovat $R_1 < R_2$. Mikä on sen kapasitanssi?

Esim. 26.5: Sylinterikondensaattori koostuu kahdesta sisäkkäisestä ja samankeskeisestä sylinteristä, joiden molempien pituus on L ja säteet ovat $a < b$. Laske sylinterikondensaattorin kapasitanssi.

26.2. Kondensaattorikytkentöjä

Kun kaksi kondensaattoria kytketään sarjaan, on kuvan mukaan $V = V_1 + V_2$. Varausten siirtymistä tarkasteltaessa huomataan, että $Q_1 = Q_2 = Q$. Määrätään kytkettyjen kondensaattorien yhteinen kapasitanssi $Q/V = C = C(C_1,C_2)$.

Koska $V_1 = Q/C_1$ ja $V_2 = Q/C_2$, seuraa

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

ja

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} ,$$

joka yleistettynä N kappaleelle sarjaan kytkettyjä kondensaattoreita tulee muotoon

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} .} \qquad (26.7)$$

Rinnankytkennässä taas $Q = Q_1 + Q_2$ ja $V_1 = V_2 = V$ sekä $Q_1 = C_1V$ ja $Q_2 = C_2V$. Siten

$$Q = C_1V + C_2V$$

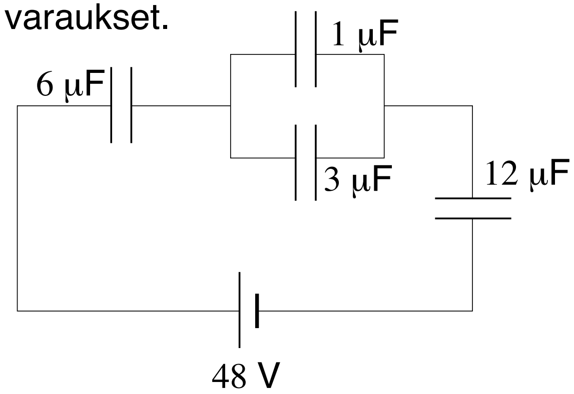
ja

$$C = Q / V = C_1 + C_2 .$$

Yleistettynä taas N kappaleelle rinnankytkettyjä kondensaattoreita saadaan

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + \ldots + C_N .} \qquad (26.8)$$

Esim. 26.6: Määrää oheisessa kytkennässä koko piirin kapasitanssi, sekä erikseen jokaisen kondensaattorin jännitteet ja varaukset.



26.3. Kondensaattorin sähköstaattinen energia

Kondensaattorin varaaminen vaatii energiaa. Sitä on se työ, joka tarvitaan siirtämään varaus kondensaattorin levystä toiseen levyjen välillä olevan jännitteen yli (johtoja pitkin, esim. sähköparin avulla). Koska kondensaattorin jännite riippuu sen varauksesta, $V = q/C$, tarvitaan infinitesimaalisen lisävarauksen dq siirtämiseen työ $dW = V\,dq = (q/C)\,dq$, ja siten

$$W = \int_Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} .$$

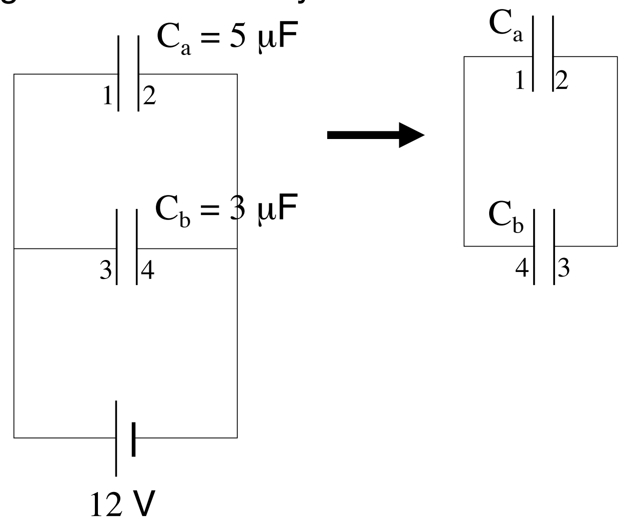
Tämä työ varastoituu kondensaattoriin sähköstaattiseksi energiaksi U_E, joten

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\,V = \frac{1}{2}C\,V^2 . \qquad (26.9)$$

Kondensaattoria purettaessa tällä energialla voidaan tehdä työtä.

Esim. Varatun metallipallon sähköstaattinen energia.

Esim. 26.7: Oheisen kytkennän kondensaattorit irroitetaan jännitelähteestä ja kytketään sitten uudelleen toisen kuvan mukaisesti. Laske kondensaattorien varaukset, jännitteet ja energiat molemmissa kytkennöissä.



26.4. Sähkökentän energiatiheys

Sähköstaattisen potentiaalienergian voidaan ajatella olevan varastoituna sähkökenttään. Tarkastellaan esim. tasolevykondensaattoria $C = \varepsilon_0 A/d$, jossa $V = Ed$, ja $U_E = 1/2\ C\ V^2 = 1/2\ \varepsilon_0\ A/d\ (Ed)^2 = 1/2\ \varepsilon_0\ Ad\ E^2$. Koska Ad on tilavuus, jonka kenttä täyttää, voidaan kentän energiatiheys eli energia/tilavuusyksikkö (J/m^3) kirjoittaa muotoon

$$\underline{u_E = 1/2\ \varepsilon_0\ E^2.} \qquad (26.10)$$

Huomaa, että lauseke on kondensaattorista riippumaton (jos E on vakio). Tämä tulos on myös yleisesti voimassa kaikille sähkökentille, vaikka kenttä ei olisikaan vakio.

<u>Esim. 26.9:</u> Laske varatun metallipallon energia sen varauksen Q muodostaman sähkökentän avulla. (Vrt. Esim. 25.7)

<u>Esim.</u> Laske uraaniytimen, $R = 7.4 \times 10^{-15}$ m ja $Q = 92$ e, sähköstaattinen energia olettamalla se homogeenisesti varatuksi palloksi.

26.5. Eristeaineen sähköiset ominaisuudet

Jos tasolevykondensaattorin levyjen väliin tuodaan materiaalia, joka ei johda sähköä, kondensaattorin kapasitanssi kasvaa. Tarkastellaan kahta tapausta:

(i) Kytkemätön kondensaattori

Olkoon aluksi kondensaattorin varaus Q, jännite $V_0 = Q/C_0$ ja kenttä $E_0 = V_0/d$. Kun levyjen väliin tuodaan eriste jännite laskee tekijällä $1/\kappa < 1$,

$$V_D = V_0 / \kappa \tag{26.11}$$

ja samoin sähkökenttä

$$E_D = E_0 / \kappa. \tag{26.12}$$

Koska varaus ei voi muuttua $C_D = Q/V_D = \kappa\, Q/V_0 = \kappa\, C_0$.

(ii) Jännitelähteeseen kytketty kondensaattori

Nyt jännite säilyy vakiona V ja varaus kasvaa arvosta Q_0 arvoon $Q_D = \kappa\, Q_0$ ja $C_D = Q_D/V = \kappa\, Q_0/V = \kappa\, C_0$, joten

$$C_D = \kappa\, C_0. \tag{26.13}$$

Dielektriselle vakiolle κ käytetään myös nimityksiä suhteellinen permittiivisyys ja eristevakio sekä tavallisimmin merkintää ε_r.

Eräiden aineiden (staattinen) κ

Aine	κ	Läpilyöntikenttä (MV/m)
Ilma	1.0006	3
Paperi	3.7	16
Lasi	4 – 6	9
Kumi	2 – 3.5	30
Mica	6	150
Vesi	80	–
"johde"	∞	–

26.6. Eristeaineen polarisaatio

Dielektrinen vakio κ kuvaa aineen sähkökenttään antaman vasteen voimakkuutta. Vasteena sähkökenttään aineeseen indusoituu dipoleja "molekyylien tasolla". Lisäksi, mikäli aineessa on pysyviä dipoleja, kuten esim. vedessä, ne myös orientoituvat sähkökentässä. Aineen sanotaan polarisoituvan. Aineen polarisaation aiheuttama indusoitu sähkökenttä $\mathbf{E}_i$ on vastakkainen ulkoiselle kentälle $\mathbf{E}_0$ ja

$$E_D = E_0 - E_i = E_0 / \kappa . \tag{26.14}$$

Indusoidun kentän E_i voidaan ajatella syntyvän eristeen pinnoille polarisaatiossa tulevien sidottujen pintavarausten σ_b ja $-\sigma_b$ aiheuttamana.

Esim. 26.10: Eristelevy, suhteellinen permittiivisyys κ ja paksuus t, asetetaan tasolevykondensaattorin levyjen väliin. Mikä on syntyvän kondensaattorin kapasitanssi, kun levyjen välinen etäisyys on $d > t$?

26.7. Gaussin laki eristeaineessa

Gaussin lakia sovellettaessa on otettava huomioon kokonaisvaraus. Siten, jos Gaussin pinnan sisällä on eristepinta, jolla on indusoitu pintavaraus $\sigma_b = Q_b/A$, ja esim. metallipinta, jolla on vapaa pintavaraus $\sigma_f = Q_f/A$, tulee Gaussin laiksi

$$\oint \mathbf{E}_D \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_f - Q_b}{\varepsilon_0} = \frac{Q_f}{\kappa\, \varepsilon_0}\,. \qquad (26.16)$$