9. LIIKEMÄÄRÄ

Pääkohdat:

1. Liikemäärän säilyminen
2. (a) Kimmoton törmäys: vain liikemäärä säilyy
   (b) Kimmoinen törmäys: liikemäärä ja mekaaninen energia säilyvät
3. (a) Impulssi
   (b) Impulssin aiheuttama voima

9.1. Liikemäärä

Kappaleet muuttavat liiketilaansa voimien vaikutuksen vuoksi ja voimat vaikuttavat aina kahden kappaleen välillä. Tästä voidaan päätellä, että kappaleen liiketilan muutokseen liitty aina myös jonkin toisen kappaleen liiketilan muutos. René Descartes (1596–1650) ehdottikin, että liikkeen määrä säilyisikin esim. kappaleiden törmäyksissä, vaikka nopeudet muuttuvatkin. Hän jopa ehdotti liikkeen määräksi kappaleen massan ja vauhdin tuloa.

Kun liikemäärä määritellään massan ja nopeuden tulona

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{9.1}$$

voidaan kokeellisesti todeta, että se on säilyvä suure suljetulle ja eristetylle systeemille. Tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{vakio} \qquad \text{tai} \qquad \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 = 0, \tag{9.2}$$

missä $\mathbf{p}_1$ ja $\mathbf{p}_2$ ovat vain keskenään vuorovaikutuksessa olevien kappaleiden liikemäärät.

Newtonin havaitsi omissa kokeissaan edellisen pitävän paikkansa ja muotoilikin sen perusteella 3. lakinsa. Hän totesi myös Huygensin ja Wrenin ehdotusten mukaisesti suureen mv^2 (eli kineettisen energian) säilyvän vain tietynlaisissa "kovissa" törmäyksissä.

Liikemäärän avulla dynamiikan peruslaki eli Newtonin 2. laki voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt, \tag{9.3}$$

kun kappaleen massa on vakio, eli

kappaleeseen vaikuttava voima on kappaleen liikemäärän muutos aikayksikössä.

Tämä on itseasiassa se muoto, jonka Newton itse julkaisi.

9.2. Liikemäärän säilyminen

Tarkastellaan kahden kappaleen (m_1 ja m_2) törmäystä, jossa kappaleiden välinen voima voi aiheutua kosketuksesta tai se voi olla jonkin kentän välittämä. Jos kappaleiden nopeudet ovat ennen törmäystä $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ sekä törmäyksen jälkeen $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$, niin liikemäärän säilymislaki voidaan kirjoittaa muotoon

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{9.4}$$

tai komponentteihinsa jaettuna

$$\begin{aligned} m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} &= m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} &= m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \\ m_1 u_{1z} + m_2 u_{2z} &= m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Kun merkitään kahden kappaleen liikemäärää yhteensä $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ ja jos ulkoisia voimia ei kappaleisiin vaikuta, niin

$$d\mathbf{P}/dt = d(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)/dt = d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0,$$

koska Newtonin 3. lain mukaan $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Samoin useammankin kappaleen muodostaman systeemin sisäisten voimien summa häviää ja koko systeemin liikemäärän muutos aiheutuu ulkoisista voimista

$$\mathbf{F}_{EXT} = d\mathbf{P}/dt. \tag{9.6}$$

Törmäys on kappaleiden välinen hetkellinen vuorovaikutus, jonka kesto voi vaihdella tapauksesta riippuen. Törmäys voi olla kimmoinen tai kimmoton, joissa molemmissa siis kappaleiden yhteinen liikemäärä säilyy.

Kimmoinen törmäys on sellainen, jossa myös kappaleiden yhteinen kineettinen energia säilyy eli

$$1/2\, m_1 u_1^2 + 1/2\, m_2 u_2^2 = 1/2\, m_1 v_1^2 + 1/2\, m_2 v_2^2. \tag{9.7}$$

Huomaa, että $u_i^2 = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i$ ja $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Kosketusvoimien välittämä törmäys ei ole koskaan täydellisen kimmoinen, joskin esim. teräspallojen yms. "kovien" kappaleiden törmäykset ovat hyvin lähellä sitä. Sen sijaan kenttien välittämissä ja erityisesti atomi- ja hiukkasmittakaavan törmäyksissä täydellinen kimmoisuus on tavallista.

Kimmoton törmäys on sellainen, jossa kappaleiden yhteinen kineettinen energia vähenee, koska sitä "kuluu" mm. kappaleiden muodonmuutoksiin yms. "häviöihin". Atomi- ja hiukkastasolla kineettistä energiaa voi varastoitua viritystiloihin. Täydellisesti kimmottomassa törmäyksessä kappaleet tarttuvat yhteen.

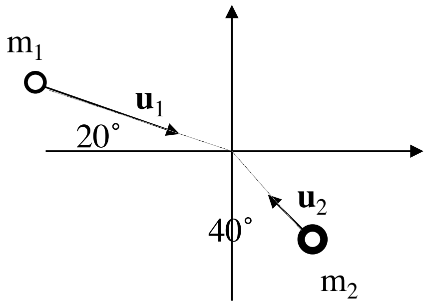
Superkimmoiseksi sanotaan törmäystä, jossa kineettinen energia lisääntyy. Tämä voi aiheutua esim. viritystilojen purkautumisesta.

(Huomaa, että kaikista energiamuodoista yhteenlaskettu kokonaisenergia säilyy kuitenkin aina kaikissa törmayksissä)

Liikemäärän säilymislain soveltamisohjeet:

1. (a) Piirrä kuva, johon on merkitty törmäävien kappaleiden massat sekä nopeudet törmäystä ennen ja sen jälkeen
   (b) Valitse koordinaatisto
2. (a) Kirjoita liikemäärän säilymisen yhtälöt kaikille komponenteille
   (b) Kirjoita kineettisen energian säilymisyhtälö, jos törmäys on kimmoinen
3. Ratkaise yhtälöistä kysytyt tuntemattomat suureet ja tarkista suureiden merkit.

<u>**Esim. 9.3.**</u> Kaksi kappaletta, joiden massat ovat $m_1 = 3.0$ kg ja $m_2 = 5.0$ kg törmäävät kuvan mukaisesti nopeuksilla $u_1 = 10.0$ m/s ja $u_2 = 5.0$ m/s ja tarttuvat yhteen. Mikä on kappaleiden yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen?



Esim. 9.5. Ballistinen heiluri on laite, jota käytetään mm. ampuma-aseen luodin nopeuden mittaamiseen. (a) Kuinka luodin nopeus lasketaan? (b) Jos luodin massa on $m = 10$ g ja heilurin massa $M = 2.0$ kg sekä mitattu heilahduksen nousukorkeus 5.0 cm, mikä oli luodin nopeus ja kuinka paljon kineettistä energiaa "häviää"?

9.3. Kimmoiset törmäykset suoraviivaisessa liikkeessä

Tarkastellaan kahden kappaleen kimmoista törmäystä yksiulotteisessa liikkeessä (x-akselilla), esim. kahden "kovan" pallon liikkuessa niiden keskipisteiden kautta kulkevaa suoraa pitkin. Kun nopeus on positiivinen oikealle ja negatiivinen vasemmalle, tulevat liikemäärän ja kineettisen energian säilymisen ilmaisevat yhtälöt muotoon

$$m_1(u_1-v_1) = m_2(v_2-u_2) \tag{9.8}$$

ja

$$m_1(u_1^2-v_1^2) = m_2(v_2^2-u_2^2). \tag{9.9a}$$

Tästä saadaan edelleen

$$m_1(u_1-v_1)(u_1+v_1) = m_2(v_2-u_2)(v_2+u_2) \tag{9.9b}$$

ja jakamalla puolittain yhtälöllä (9.8) vielä

$$(v_2-v_1) = -(u_2-u_1). \tag{9.10}$$

Tarkastellaan kahta erikoistapausta:

(i) Kappaleiden massat ovat yhtäsuuret, $m_1 = m_2 = m$.
Tällöin liikemäärän säilymisestä $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$ ja yhtälöstä $(v_2-v_1) = -(u_2-u_1)$ saadaan

$$v_1 = u_2 \quad \text{ja} \quad v_2 = u_1,$$

eli kappaleet tavallaan vaihtavat nopeuksiaan.
Esim. jos $u_2 = 0$, niin $v_1 = 0$.

(ii) Toinen kappale on aluksi levossa, $u_2 = 0$ $(m_1 \neq m_2)$.
Liikemäärän säilymisestä $m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2$ ja yhtälöstä $(v_2-v_1) = -(u_2-u_1) = u_1$ saadaan nyt

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, u_1}{m_1 + m_2} \tag{9.11}$$

ja

$$v_2 = \frac{2\, m_1\, u_1}{m_1 + m_2}. \tag{9.12}$$

Kun $m_1 >> m_2$, $v_1 \approx u_1$ ja $v_2 \approx 2u_1$.
Kun $m_1 << m_2$, $v_1 \approx -u_1$ ja $v_2 \approx 0$.

9.4. Voiman impulssi

Tarkastellaan voiman $\mathbf{F}$ aiheuttamaa kappaleen liikemäärän muutosta $\Delta\mathbf{p}$. Määritellään, että se on voiman impulssi

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i. \qquad (9.13)$$

Koska $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, niin $d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$ ja $\Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}\,dt$ sekä edelleen

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt\,, \qquad (9.14)$$

missä $\Delta t = t_f - t_i$ on voiman vaikutusaika. Määritellään keskimääräinen voima $\mathbf{F}_{av}$ yhtälöllä

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}_{av}\,\Delta t. \qquad (9.15)$$

Siten esim. törmäyksissä liikkeen pysäyttämiseen tarvittavaa voimaa voidaan pienentää pidentämällä jarrutusaikaa.

Esim. Eräässä henkilöauton kolarissa matkustajan (80 kg) kokema keskimääräinen kiihtyvyys oli 20 g, kun auto pysähtyi 80 km/h nopeudesta. Mikä oli turvavöiden kyseiseen matkustajaan kohdistama keskimääräinen voima, pysähdysaika ja impulssi? (Katso taulukoita 3.1 ja 3.2 kirjan sivulla 47)

9.5. Liikemäärän ja kineettisen energian vertailu

Koska $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ja $F = dK/dx$ tai vakiovoiman vaikuttaessa kappaleeseen $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$ ja $F = \Delta K/\Delta x$, voidaan sanoa, että kappaleeseen vaikuttava nettovoima on toisaalta kappaleen liikemäärän muutosnopeus (ajan suhteen) eli impulssi ja toisaalta kappaleen kineettisen energian muutos liikkeen pituusyksikköä kohti.

Sekä kappaleen liikemäärä että kineettinen energia riippuvat kappaleen nopeudesta. Siksi aina kappaleen kineettisen energian muuttuessa muuttuu myös sen liikemäärä. Entä muttuuko aina kappaleen liikemäärän muutuessa myös kappaleen kineettinen energia?

9.6. Kimmoinen törmäys tasoliikkeessä

Kahden kappaleen törmäys johtaa yleisessä tapauksessa tasoliikkeeseen. Tällöin saadaan liikemäärän säilymislaista kaksi yhtälöä ja kimmoisen törmäyksen tapauksessa kolmas yhtälö kineetisen energian säilymisestä, jolloin voidaan ratkaista kolme suuretta, kun muut tunnetaan.

9.7. Rakettimoottori

Rakettimoottorin työntövoima tyhjiössä perustuu liikemäärän säilymiseen, kun "pakokaasu" ohjataan suurella nopeudella taakse päin. Tämä on ns. rekyyliliikettä, jota esiintyy myös mm. ampuma-aseen laukaisuun liittyvänä "potkuna".

Tarkastellaan suoraviivaisessa liikkeessä olevaa rakettia, jonka massa on m, nopeus on v ja pakokaasujen nopeus raketin suhteen on u. Määrätään rakettimoottorin työntövoima ja raketin nopeuden lisäys.

Esim. 9.10. Raketin massa ilman polttoainetta on $M_R = 10^4$ kg ja pakokaasujen nopeus (raketin suhteen) $v_{ex} = 10^3$ m/s. Kuinka paljon polttoainetta on aluksi oltava, jotta se riittää antamaan raketille levosta lähtien loppunopeudeksi $v_f = v_{ex}$?

10. HIUKKASJOUKON DYNAMIIKKA

Pääkohdat:

1. Massakeskipiste
2. Newtonin 1. laki hiukkasjoukolle
3. Newtonin 2. laki hiukkasjoukolle
4. Hiukkasjoukon kineettinen energia

10.1. Massakeskipiste

Edellä olemme tarkastelleet kappaleen mallina hiukkasta tai massapistettä. Osoittautuukin, että pian määriteltävä kappaleen tai hiukkasjoukon (eli systeemin) massakeskipiste noudattaa massapisteen etenevän liikkeen dynamiikkaa, mutta esim. systeemin pyörimisliikkeen kuvaamiseksi sen massan jakautuma on otettava huomioon.

Tarkastellaan kahta hyvin kevyellä tangolla yhteenkytkettyä massaa m_1 ja m_2. Kokeellisesti voidaan todeta, että tangosta on löydettävissä yksi piste, johon vaikuttava voima aiheuttaa ainoastaan kappaleiden etenevää liikettä, kun taas mihin tahansa muuhun pisteeseen vaikuttava voima aiheuttaa myös pyörimisliikettä.

Lisäksi voidaan havaita, että tämä piste jakaa tangon kahteen osaan ℓ_1 ja ℓ_2 siten, että $\ell_2/\ell_1 = m_1/m_2$ eli

$$m_1\,\ell_1 = m_2\,\ell_2.$$

Määritellään, että tämä piste on näiden kahden massan massakeskipiste, joka on yleensä sama kuin painopiste, ks. 12.6.

Asetetaan x-akseli tankoa pitkin ja merkitään massojen paikkoja x_1 ja x_2 sekä massakeskipistettä x_{CM}. Tällöin $\ell_1 = x_{CM} - x_1$ ja $\ell_1 = x_2 - x_{CM}$, joten

$$m_1 (x_{CM} - x_1) = m_2 (x_2 - x_{CM}).$$

Tästä voidaan ratkaista

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

joka on massoilla m_1 ja m_2 painotettu paikkojen x_1 ja x_2 keskiarvo. Tämä voidaan yleistää N:n massapisteen systeemille ja kaikille kolmelle koordinaattiakselille, jolloin

$$x_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i y_i}{M} \quad \text{ja} \quad z_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i z_i}{M}, \tag{10.2}$$

missä $M = \sum m_i$ on koko systeemin yhteinen massa. Nämä kolme yhtälöä voidaan yhdistää vektorimerkinnöin

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{10.1}$$

Usein voidaan päätellä kappaleen symmetrian perusteella yksi tai useampia massakeskipisteen komponenteista. Mikäli kappaleella on symmetria-akseleita tai tasoja tai symmetriakeskuksia, sisältävät nämä myös kappaleen massakeskipisteen.

Esim. sylinteri, suorakaide, pallo, rengas, kartio, tasakylkinen kolmio, jne.

Kun kappaletta kuvataan massapisteellä, sen paikka on kappaleen massakeskipiste. Massakeskipisteen paikan mukaan määräytyy esim. kappaleen potentiaalienergia gravitaatiokentässä ja siksi kappale asettuu sellaiseen paikkaan ja asentoon, jossa massakeskipiste on niin alhaalla kuin mahdollista. Tähän perustuen voidaan määrittää kappaleen massakeskipiste kokeellisesti, ks. kappale 12.6.

Esim. 10.2. Tanko, jonka pituus on $3L$, on taivutettu suoraan kulmaan sellaisesta kohdasta, joka jakaa sen L:n ja $2L$:n mittaisiin osiin. Etsi taivutetun tangon massakeskipiste.

10.2. Jatkuvasti jakautuneen massan massakeskipiste

Jatkuvasti jakautunut massa voidaan ajatella joukoksi infinitesimaalisen pieniä massa-alkioita, joiden summa saadaan integraalina,

$$\sum_i^N \mathbf{r}_i \Delta m_i \xrightarrow[\Delta m_i \to 0]{} \int_M \mathbf{r}\, dm .$$

Siten

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_M \mathbf{r}\, dm \,, \qquad (10.3)$$

joka voidaan jakaa komponentteihinsa

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x\, dm \,,\; y_{CM} = \frac{1}{M} \int_M y\, dm \quad \text{ja} \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int_M z\, dm \,.$$

Massaelementti dm valitaan kappaleen symmetrian mukaan. Esim. ohuen homogeenisen sauvan $dm = \lambda\, dx$, ohuen homogeenisen suorakaiteen muotoisen levyn $dm = \sigma\, dA$ ja homogeenisen suoran särmiön $dm = \rho\, dV$.

<u>Esim. 10.3.</u> Laske puoliympyräksi taivutetun ohuen homogeenisen sauvan massakeskipiste? Jos tämä taivutettu sauva jaetaan kahteen yhtäsuureen osaan, missä on "puolikkaan" massakeskipiste?

10.3. Massakeskipisteen dynamiikka

Koska $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, seuraa massakeskipisteen määritelmästä (10.1), että

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i}^{N} m_i \mathbf{v}_i}{M} \qquad (10.4)$$

ja edelleen että koko hiukkasjoukon liikemäärä

$$\mathbf{P} = M\, \mathbf{v}_{CM} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N \qquad (10.5)$$

eli kaikkien hiukkasten liikemäärien summa. Siten, jos hiukkasjoukon sisäisiä liikkeitä ei tarkastella tai kyseessä on jäykkä kappale (mahdollisesti jatkuvasti jakautunut), hiukkasjoukon kollektiivinen dynamiikka voidaan kuvata sen massakeskipisteen liikkeenä. Newtonin 2. laki voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{F}_{EXT} = M\, \mathbf{a}_{CM} \qquad (10.6)$$

tai

$$\mathbf{F}_{EXT} = d\mathbf{P}/dt, \qquad (10.7)$$

missä $\mathbf{F}_{EXT}$ on hiukkasiin tai kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti. Esim. hiukkasjoukon pudotessa massakeskipiste on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä riippumatta hiukkasten välisistä vuorovaikutuksista.

Erityisesti jos $\mathbf{F}_{EXT} = 0$, niin $\mathbf{v}_{CM}$ = vakio.

10.4. Hiukkasjoukon kineettinen energia

Tarkastellaan hiukkasjoukon hiukkasta, jonka paikka on $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}_i'$, missä $\mathbf{r}_{CM}$ ja $\mathbf{r}_i'$ ovat hiukkasjoukon massakeskipiste ja hiukkasen paikka sen suhteen. Tämän hiukkasen nopeus on $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_i'$ vastaavin merkinnöin ja kineettinen energia

$$K_i = 1/2\ m_i\ v^2 = 1/2\ m_i\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1/2\ m_i\ (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_i')$$
$$= 1/2\ m_i\ (v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2\ \mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{v}_i').$$

Koko joukon kineettinen energia on

$$K = \sum K_i = 1/2\ (\sum m_i)\ v_{CM}^2 + 1/2\ (\sum m_i\ v_i'^2) + \mathbf{v}_{CM} \cdot (\sum m_i\ \mathbf{v}_i').$$

Viimeinen termi $\mathbf{v}_{CM} \cdot (\sum m_i\ \mathbf{v}_i') = \mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{P}_{INT} = 0$, koska joukon liikemäärä massakeskipisteen suhteen $\mathbf{P}_{INT}$ häviää. Siten

$$K = K_{CM} + K_{rel}, \qquad (10.8)$$

missä $K_{CM} = 1/2\ M\ v_{CM}^2$ on massakeskipisteen liikkeen kineettinen energia ja $K_{rel} = (1/2\ \sum m_i\ v_i'^2)$ on hiukkasten kineettinen energia massakeskipisteen suhteen.

Siis,

hiukkasjoukon kineettinen energia voidaan jakaa massakeskipisteen liikkeen ja joukon sisäisten liikkeiden kineettisiin energioihin.

Hiukkasjoukon sisäinen liike voi olla esim. pyörimistä, värähdysliikettä tai hiukkasten "törmäyksiä". Tällaisissa sisäisissä törmäyksissä voi vain sisäisten liikkeiden kineettinen energia muuttua toisiksi energian muodoiksi kimmottomuuden seurauksena.

($E = mc^2$, ks. kirjan sivu 197)

10.5. Ulkoisten voimien tekemä työ

Hiukkasjoukon kineettinen energia voi muuttua sekä ulkoisten voimien tekemän työn W_{EXT} että sisäisten voimien tekemän työn W_{INT} seurauksena. Siten

$$W_{EXT} + W_{INT} = \Delta K_{CM} + \Delta K_{rel}. \qquad (10.9)$$

Jos määritellään sisäisen potentiaalienergia funktion $\Delta U_{INT} = -W_{INT}$ avulla hiukkasjoukon sisäinen energia

$$E_{INT} = K_{rel} + U_{INT},$$

niin työ–energia riippuvuus (10.9) voidaan kirjoittaa muotoon

$$W_{EXT} = \Delta K_{CM} + \Delta E_{INT}. \qquad (10.10)$$

10.6. Kitkan tekemä työ

Liukukitkavoimien tekemän työn voidaan nyt edellä olevan mukaisesti ajatella muuttuvan kappaleen ja pinnan muodostaman systeemin sisäiseksi energiaksi (lämmöksi).

10.7. Muuttuvamassaiset systeemit

Mikäli voiman vaikutuksen alaisen kappaleen massa muuttuu ilman että massaa viedään kappaleesta pois tai tuodaan siihen lisää (kuten raketin tapauksessa), tulee dynamiikan peruslaki muotoon

$$\mathbf{F}_{EXT} = d\mathbf{p}/dt = m\ d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v}\ dm/dt, \qquad (10.14)$$

kun $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

11. JÄYKÄN KAPPALEEN PYÖRIMISLIIKE

Pääkohdat:

1. Pyörimisliikkeen kinematiikka
2. Hitausmomentti
3. Jäykän kappaleen pyörimisliikkeen kineettinen energia
4. Voiman momentti
5. Newtonin 2. laki pyörimisliikkeelle

Jäykkä kappale on malli kiinteästä aineesta muodostuvalle kappaleelle. Jäykän kappaleen osaset pysyvät paikoillaan toistensa suhteen, vaikka kappaleen eri kohtiin voi kohdistua voimia ja kappaleen liiketila voi muuttua.

Tarkastellaan seuraavassa jäykän kappaleen pyörimistä kiinteän akselin ympäri. Akseli on kiinnitetty kappaleeseen ja se säilyttää suuntansa, mutta akseli voi olla etenevässä liikkeessä kappaleen mukana. Jos akseli on lisäksi kiinnitetty inertiaalikoordinaatistoon, on kyseessä puhdas pyörimisliike.

11.1. Pyörimisliikkeen kinematiikka

Kappaleen asento (pyörimisessä akselin ympäri) määritellään kulman

$$\theta = s / r \tag{11.1}$$

avulla jonkin referenssi asennon ja jonkin akselista etäisyydellä r olevan pisteen avulla, missä s on pisteen kierrossa kulkema matka.

Kulman luonnollinen yksikkö on radiaani (rad), mutta myös erilaisia asteita käytetään usein.

Keskimääräinen kulmanopeus määritellään

$$\omega_{av} = \Delta\theta / \Delta t = (\theta_f - \theta_i) / (t_f - t_i) \tag{11.2}$$

ja hetkellinen kulmanopeus vastaavasti

$$\omega = d\theta/dt. \tag{11.3}$$

Kulmanopeus voidaan määritellä vektorisuureena, jonka suunta ilmaisee akselin suunnan ja pyörimisliikkeen suunnan akselin ympäri. Pyörimisliikkeen suunnan voi päätellä vektorin ω suunnasta, tai päin vastoin, ns. "oikean käden säännön" avulla.

Jos pyörimisliikkeen jakso on T, on sen taajuus $f = 1/T$ ja kulmanopeus

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f. \tag{11.4}$$

Taajuuden yksikkö on kierrosta/s tai 1/s tai hertsi (1 Hz = 1 s^{-1}), kun taas kulmanopeuden yksikkö on rad/s.

Akselista etäisyydellä r pyörivän pisteen kulkema matka kulman θ funktiona on yhtälön (11.1) mukaan $s = r\theta$. Tästä saadaan derivoimalla ajan suhteen ko. pisteen ratanopeus

$$v = r\,\omega. \tag{11.5}$$

Kappaleen kaikilla pisteillä on sama kulmanopeus ω, mutta ratanopeus v riippuu pisteen ja akselin välisestä etäisyydestä.

Kulmanopeuden muuttuessa määritellään keskimääräinen kulmakiihtyvyys

$$\alpha_{av} = \Delta\omega / \Delta t$$

ja hetkellinen kulmakiihtyvyys vastaavasti

$$\alpha = d\omega/dt. \tag{11.6}$$

Kun edellisissä määrittelyissä käytetään kulmanopeusvektoria, tulee myös kulmakiihtyvyydestä vektorisuure. Kulmakiihtyvyyden yksikkö on rad/s^2.

Jos kulmakiihtyvyys α on vakio, on kyseessä tasaisesti kiihtyvä ympyräliike ja integroimalla $\int d\omega = \int \alpha\, dt$ saadaan

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t \tag{11.7}$$

ja integroimalla tästä edelleen $\int d\theta = \int \omega\, dt = \int (\omega_0 + \alpha\, t)\, dt$ saadaan

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + 1/2\, \alpha\, t^2. \tag{11.8}$$

Nämä ovat täsämälleen samaa muotoa kuin vastaavat tasaisesti kiihtyvän suoraviivaisen liikkeen kinemaattisten suureiden väliset relaatiot. Edelleen samoin voidaan eliminoida aika t edellisistä yhtälöistä, jolloin saadaan

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\, \alpha\, (\theta - \theta_0). \tag{11.9}$$

Tasaisen ympyräliikkeen keskihakuiskiihtyvyys on

$$a_r = v^2 / r = \omega^2\, r \tag{11.10}$$

ja jos tangentiaalista (eli nopeuden suuntaista) kiihtyvyyttä esiintyy, niin se on

$$a_t = \alpha\, r. \tag{11.11}$$

Näiden suureiden vektorisumman $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$ itseisarvo on

$$a = (a_r^2 + a_t^2)^{1/2}.$$

Huomaa, että pyörivän kappaleen kiertymäkulma θ, kulmanopeus ω ja -kiihtyvyys α ovat samat minkä tahansa kappaleessa olevan pisteen suhteen määritettynä. Siten esim. renkaan vieriessä pintaa pitkin tapahtuu hetkellinen pyöriminen kappaleen ja pinnan kosketuspisteen ympäri samalla kulmanopeudella kuin pyöriminen akselin ympäri tapahtuu.

11.2. Pyörimisliikkeen kineettinen energia ja hitausmomentti

Tarkastellaan jäykän kappaleen pyörimistä kiinteän akselin ympäri, jolloin kappaleen jokaisen massaelementin m_i liike on ympyräliikettä etäisyydellä r_i pyörimisakselista. Tällöin kappaleen pyörimisliikkeen kineettinen energia on

$$K = \sum_i (1/2\, m_i\, v_i^2) = \sum_i (1/2\, m_i\, r_i^2\, \omega^2),$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$K = 1/2\, I\, \omega^2, \tag{11.13}$$

missä

$$I = \sum_i m_i\, r_i^2 \tag{11.14}$$

on kappaleen hitausmomentti. Kappaleen hitausmomentti riippuu pyörimisakselin paikasta kappaleessa tai kappaleen massan jakautumisesta pyörimisakselin suhteen. Siten voidaan päätellä esim. samanmassaisten kappaleiden hitausmomenttien keskinäisiä suuruuksia.

Kappaleen hitausmomentti on pyörimisliikkeessä etenevän liikkeen massaa vastaavassa asemassa, vrt. $K = 1/2\, I\, \omega^2$ ja $K = 1/2\, m\, v^2$. Siten se on myös pyörimisliikkeen "hitautta" kuvaava suure.

Esim. 11.3. Molekyylien massa on keskittynyt siinä olevien atomien ytimiin. Laske kaksiatomisen molekyylin (ytimien massat m_1 ja m_2) hitausmomentti sidoksen kautta kulkevan akselin suhteen sekä sidosta vastaan kohtisuorien akselien suhteen, kun akseli kulkee toisen atomin kautta tai massakeskipisteen kautta.

Tarkastellaan vielä kappaletta, joka pyörii massakeskipisteestä etäisyydellä h olevan akselin ympäri. Tällöin kineettinen energia voidaan kirjoittaa massakeskipisteen kineettisen energian ja sisäisen liike-energian summana yhtälön (10.8) mukaisesti

$$K = K_{CM} + K_{rel}.$$

Tästä saadaan edelleen

$$K = 1/2\, M\, v_{CM}^2 + 1/2\, I_{CM}\, \omega^2, \qquad (11.15)$$

missä M on kappaleen massa, v_{CM} on massakeskipisteen ratanopeus, I_{CM} on kappaleen hitausmomentti massakeskipisteen kautta kulkevan ja pyörimisakselin kanssa yhdensuuntaisen akselin suhteen. Koska kulmanopeus ω on sama kappaleen kaikkien pisteiden suhteen, $v_{CM} = \omega h$. Siten

$$K = 1/2\, Mh^2\, \omega^2 + 1/2\, I_{CM}\, \omega^2 = 1/2\, (Mh^2 + I_{CM})\, \omega^2 = 1/2\, I\, \omega^2,$$

kun

$$I = I_{CM} + Mh^2. \qquad (11.16)$$

Tämä on ns. Steinerin sääntö (parallel axis theorem), jonka avulla voidaan laskea kappaleen hitausmomentti minkä tahansa akselin suhteen, jos sen suuntaisen ja massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen laskettu hitausmomentti tunnetaan.

Esim. Sovella Steinerin sääntöä edellisen esimerkin (11.3) tapaukseen.

11.3. Jatkuvasti jakautuneen massan hitausmomentti

Hitausmomentin laskemiseksi jatkuvasti jakautuneen massan tapauksessa summa yli massaelementtien korvataan integraalilla yli koko kappaleen $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2\, dm = \int dI = I$ eli

$$I = \int r^2\, dm, \qquad (11.7)$$

missä r on massaelementtien kohtisuora etäisyys pyörimisakselista.

Esim. 11.5. Ohuen sauvan pituus on L ja massa M. Laske sauvan hitausmomentti sitä vastaan kohtisuoran akselin suhteen, kun akseli kulkee sauvan painopisteen kautta tai sen toisen pään kautta.

Esim. 11.6. Laske ympyrälevyn hitausmomentti sen keskipisteen kautta kulkevan kohtisuoran akselin suhteen.

Esim. 11.7. Laske homogeenisen pallon hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Kuinka lasketaan ohuen pallokuoren hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen.

11.4. Mekaanisen energian säilyminen pyörimisliikkeessä

Mekaanisen energian säilymislaki eli ns. "energiaperiaate"

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$$

eli

$$E = K + U$$

on voimassa vain konservatiivisten voimien $\mathbf{F} = -\nabla U$ vaikuttaessa. Kun massakeskipisteen etenevän liikkeen ja pyörimisliikkeen energiat kirjoitetaan erikseen,

$$K = 1/2\, M\, v_{CM}^2 + 1/2\, I_{CM}\, \omega^2.$$

11.5. Voiman momentti

Voima antaa kappaleelle kiihtyvyyden etenevässä liikkeessä. Voiman vastine pyörimisliikkeessä on momentti, joka antaa kappaleelle kulmakiihtyvyyden.

Määritellään voiman $\mathbf{F}$ momentti origon suhteen

$$\tau = r_\perp F = r F_\perp \qquad (11.21)$$

$$= r F \sin\theta \qquad (11.22)$$

tai vektoriyhtälönä

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \qquad (12.1)$$

missä $\mathbf{r}$ on voiman vaikutuspisteen etäisyys valitusta origosta.

Momentin SI-yksikkö on Nm. Se on sama kuin energian yksikkö, mutta momentti ei ole kuitenkaan energiasuure. Momentti on dynamiikassa voiman luonteinen suure ja vektori, kun taas energia on skalaari.

11.6. Jäykän kappaleen pyöriminen kiinteän akselin ympäri

Tarkastellaan ensin kiinteästä akselista etäisyydellä r olevaa massapistettä m, johon vaikuttaa voima F. Voiman momentti akselin suhteen on $\tau = r\, F_\perp$. Jos massapiste voi liikkua vain ympyrärataa akselin ympäri, saa se ratakiihtyvyyden $a_\perp = r\,\alpha$, jolle $F_\perp = m a_\perp = mr\,\alpha$. Siten $\tau = r\, F_\perp = mr^2\,\alpha = I\,\alpha$. Siis

$$\tau = I\,\alpha, \qquad (11.23a)$$

missä I on massapisteen hitausmomentti akselin suhteen. Tämä yleistetään seuraavassa kappaleessa koskemaan myös jäykkää kappaletta (eikä ainoastaan yhtä massapistettä).

Saatu tulos on dynamiikan peruslaki pyörimisliikkeelle. Se pätee, paitsi kappaleen pyörimisliikkeessä kiinteän akselin ympäri, myös pyörimisliikkeessä massakeskipisteen kautta kulkevan akselin ympäri, vaikka massakeskipiste olisi samalla etenevässä liikkeessä.

11.7. Työ ja teho

Koska etenevässä liikkeessä pätee $dW = F\,dx$ on pyörimisliikkeen tapauksessa voimassa

$$dW = F_\perp\,(r\,d\theta) = \tau\,d\theta.$$

Momentin tekemä työ muuttuu kappaleen kineettiseksi energiaksi $1/2\, I\,\omega^2$, joten

$$\tau = \frac{dW}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\tfrac{1}{2} I\,\omega^2\right) = I\,\omega\,\frac{d\omega}{d\theta} = I\,\omega\,\frac{d\omega}{dt}\,\frac{dt}{d\theta} = I\,\omega\,\alpha\,\frac{1}{\omega} = I\,\alpha$$

ja siten voidaan (11.23a) yleistää jäykälle kappaleelle,

$$\boxed{\tau = I\,\alpha.} \qquad (11.23b)$$

Vektorimerkinnöin edellinen voidaan kirjoittaa muotoon $\tau = I\,\alpha$.

Koska $P = dW/dt$ ja $dW = \tau\, d\theta$, saadaan

$$P = \tau\,\omega, \tag{11.24}$$

samoin kuin etenevän liikkeen tapauksessa $P = F\,v$.

Yhtälöä (11.23b) johdettaessa pääteltiin, että

$$W = \Delta K = 1/2\, I\,\omega_f^2 - 1/2\, I\,\omega_i^2. \tag{11.25}$$

<u>Esim. 11.13.</u> Homogeeninen pallo, jonka massa on M, säde R ja hitausmomentti $2/5\ MR^2$, vierii alas kaltevaa tasoa, joka muodostaa kulman θ vaakatason kanssa. (a) Mikä on pallon kiihtyvyys tason suunnassa? (b) Mikä on lepokitkakertoimen vähintään oltava, jotta pallo vierisi liukumatta?

<u>Esim. 11.15.</u> Homogeeninen sauva, jonka pituus on L ja massa M, voi vapaasti pyöriä toisen päänsä ympäri. (a) Mikä on sauvan kulmakiihtyvyys, kun se muodostaa kulman θ pystysuoran suunnan kanssa? (b) Mikä on sauvan vapaan pään kiihtyvyys silloin kun sauva on vaaka-asennossa?

11.8. Vierimiskitka

12. LIIKEMÄÄRÄMOMENTTI JA STATIIKKA

Pääkohdat:

1. Voiman momentti vektorisuureena
2. (a) Massapisteen liikemäärämomentti
   (b) Jäykän kappaleen liikemäärämomentti kiinteän akselin suhteen
3. Pyörimisliikkeen dynamiikka
4. Liikemäärämomentin säilyminen
5. Staattinen tasapaino

12.1. Voiman momentti vektorisuureena

Edellä, kappaleessa 11.5, jo määriteltiin voiman momentti

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{12.1}$$

missä $\mathbf{r}$ on voiman vaikutuspisteen etäisyys valitusta origosta. Momentti on siis vektori, jonka itseisarvo on $\tau = r_\perp F = r F_\perp = r F \sin\theta$ ja suunta on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{F}$ vastaan. Jos kappale on kiinnitetty origoon, voiman momentti pyrkii kiertämään kappaletta origon kautta kulkevan ja momenttivektorin suuntaisen akselin ympäri.

Huomaa, että momentti määritellään pisteen suhteen, mutta hitausmomentti määritellään akselin suhteen.

12.2. Liikemäärämomentti

Massapisteen liikemäärämomentti eli pyörimismäärä jonkin pisteen, esim. origon suhteen on

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{12.2}$$

missä $\mathbf{r}$ on massapisteen paikka origon suhteen ja $\mathbf{p}$ on sen liikemäärä. Liikemäärämomentti on vektori, jonka suuruus on

$$\ell = r\,p \sin\theta = r_\perp p = p_\perp r. \tag{12.3}$$

Liikemäärän SI-yksikkö on kgm^2/s.

Vakionopeudella suoraviivaisessa liikkeessä olevan massapisteen liikemäärämomentti on vakio minkä tahansa pisteen suhteen määritettynä.

Jos massapiste on tasaisessa ympyräliikkeessä (vakiovauhdilla v) R-säteisen ympyrän kehällä, saadaan sen liikemäärämomentiksi ympyrän keskipisteen suhteen vakio $\boldsymbol{\ell}$, jolle

$$\ell = mvR = mR^2\omega \tag{12.4}$$

ja $\boldsymbol{\ell}$-vektori on kulmanopeuden ω eli pyörimisakselin suuntainen.

Jos taas liikemäärämomentti määritetään jonkin muun akselilla olevan pisteen suhteen, saadaan edelleen vakio $\boldsymbol{\ell}$, mutta nyt $\boldsymbol{\ell}$ ja ω eivät ole yhdensuuntaisia. Silloin

$$\ell_z = mR^2\omega. \tag{12.5}$$

Usean hiukkasen m_i joukon kokonaisliikemäärämomentti on

$$\mathbf{L} = \sum_i \boldsymbol{\ell}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (12.6)$$

missä kaikki liikemäärämomentit $\mathbf{L}$ ja $\boldsymbol{\ell}_i$ on määriteltävä saman pisteen suhteen. Tarkasteltaessa jäykän kappaleen pyörimistä akselin ympäri voi tämä piste (origo) olla missä tahansa pyörimisakselilla.

Origon valinnasta riippuen yksittäisen massapisteen liikemäärämomentti $\boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ voi saada erilaisia arvoja, mutta liikemäärämomentin z-komponentti on yhtälön (2.15) mukaan aina $\ell_{iz} = m_i R_i^2 \omega$. Siten

$$L_z = \sum_i \ell_{iz} = \sum_i m_i R_i^2\, \omega$$

ja koska $I = \sum_i m_i R_i^2$, saadaan

$$L_z = I\, \omega. \quad (12.7a)$$

Jos jäykkä kappale on symmetrinen pyörimisakselinsa suhteen, kumoutuvat kaikki ℓ_{ix}- ja ℓ_{iy}-komponentit pareittain, jolloin $L = L_z$. Silloin $\mathbf{L}$ ja ω ovat yhdensuuntaiset ja

$$\mathbf{L} = I\, \omega. \quad (12.7b)$$

Yleisessä tapauksessa $\mathbf{L}$- ja ω-vektorien suunnat voivat poiketa toisistaan.

<u>**Esim. 12.2.**</u> M-massainen ja R-säteinen kiekko pyörii kulmanopeudella ω sellaisen kohtisuoran akselin ympäri, joka on etäisyydellä $R/2$ kiekon keskipisteestä. Mikä on L_z ja $\mathbf{L}$?

12.3. Pyörimisliikkeen dynamiikka

Derivoidaan ajan suhteen massapisteen liikemäärämomentin määritelmä $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, jolloin saadaan

$$d\boldsymbol{\ell}/dt = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt + d\mathbf{p}/dt \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \tau.$$

Siten siis massapisteelle on voimassa

$$\tau = d\boldsymbol{\ell}/dt, \quad (12.8)$$

missä sekä τ että $\boldsymbol{\ell}$ on määriteltävä saman pisteen suhteen. Siis, massapisteen liikemäärämomentin muutos on sama kuin siihen vaikuttava voiman momentti. Tämä vastaa etenevän liikkeen relaatiota $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$.

Massapistejoukon etenevän liikkeen tarkastelussa todettiin, että joukon sisäiset voimat eivät vaikuta koko systeemin massakeskipisteen dynamiikkaan, vaan ainoastaan ulkoiset voimat. Sama pätee myös pyörimisliikkeen dynamiikkaan ja yhtälö (12.8) voidaan kirjoittaa koko massapistejoukolle muodossa

$$\tau_{EXT} = d\mathbf{L}/dt, \quad (12.9)$$

missä $\tau_{EXT} = \sum_i \tau_i$ on massapisteisiin vaikuttavien ulkoisten momenttien summa ja $\mathbf{L} = \sum_i \boldsymbol{\ell}_i$ on massapisteiden liikemäärämomenttien summa. Siis, hiukkasjoukon kokonaisliikemäärämomentin muutos on sama kuin hiukkasiin vaikuttavien ulkoisten voimien momenttien summa.

Symmetrisen jäykän kappaleen liikemäärä on (12.7b)

$$\mathbf{L} = I\, \omega,$$

josta derivoimalla ajan suhteen saadaan $d\mathbf{L}/dt = I\, d\omega/dt = I\, \alpha$, koska I on vakio. Yhtälön (12.9) perusteella saadaan nyt

$$\tau = I\, \alpha, \quad (12.10)$$

joka on jo edellä johdettu dynamiikan peruslaki (Newtonin 2. laki) pyörimisliikkeelle (11.23).

12.4. Liikemäärämomentin säilyminen

Koska (12.9) $\tau_{EXT} = d\mathbf{L}/dt$, voidaan päätellä liikemäärämomentin säilymislaki:

jos $\tau_{EXT} = 0$, niin $\mathbf{L}$ on vakio

eli

jos systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien momenttien summa on nolla, niin systeemin liikemäärämomentti säilyy vakiona.

Liikemäärämomentin säilymislaki on jälleen analoginen etenevän liikkeen liikemäärän säilymislain kanssa.

Huomaa erityisesti tämän lain yleisyys: Se on voimassa kaikenlaisille massajakautumille (niin massapistejoukolle kuin jäykälle kappaleelle) ja myös hitausmomentin muuttuessa. Jos $L = I\,\omega$ ja hitausmomentti muuttuu, niin

$$I_f\,\omega_f = I_i\,\omega_i. \tag{12.11}$$

Esim. 12.5. Kiekko, jonka hitausmomentti on 4.0 kgm^2, pyörii pystysuoran akselin ympäri 3.0 rad/s. Toinen kiekko, jonka hitausmomentti on 2.0 kgm^2, ei aluksi pyöri, mutta liukuu edellisen kiekon akselia pitkin sen päälle, jonka jälkeen kiekot pyörivät yhdessä. (a) Mikä on kiekkojen yhteinen kulmanopeus? (b) Mikä on kineettisen energian muutos?

Esim. 12.8. Johda Keplerin 2. laki: Auringon ja planeetan välinen yhdysjana piirtää yhtä pitkissä ajoissa yhtä suuret pinnat, kun planeetan kiertorata Auringon ympäri on ellipsi.

12.5. Jäykän kappaleen tasapaino

Jäykän kappaleen sanotaan olevan tasapainossa, jos seuraavat kaksi ehtoa ovat molemmat voimassa:

1. kappaleen massakeskipisteen kiihtyvyys on nolla ja
2. kappaleen kulmakiihtyvyys minkä tahansa akselin suhteen on nolla.

Tasapainossa oleva kappale voi siis liikkua tasaisella nopeudella tai pyöriä vakiokulmanopeudella. Jos myös nämä nopeudet ovat nollia, niin kappaleen sanotaan olevan staattisessa tasapaionossa.

Jos kappaleen massakeskipiste ei ole kiihtyvässä liikkeessä, täytyy ulkoisten voimien vektorisumman hävitä eli

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \tag{12.12}$$

joka voidaan jakaa komponentteihinsa

$$\sum_i F_{xi} = 0, \quad \sum_i F_{yi} = 0, \quad \text{ja} \quad \sum_i F_{zi} = 0. \tag{12.13}$$

Jos kappaleella ei ole kulmakiihtyvyyksiä minkään akselin suhteen, täytyy kaikkien ulkoisten voimien momenttien vektorisumman myös hävitä eli

$$\sum_i \tau_i = 0, \tag{12.14}$$

joka myös voidaan jakaa komponentteihinsa

$$\sum_i \tau_{xi} = 0, \quad \sum_i \tau_{yi} = 0, \quad \text{ja} \quad \sum_i \tau_{zi} = 0. \tag{12.15}$$

Voimaparin muodostavat kaksi voimaa, joiden summa on nolla, mutta joiden momentti ei ole nolla.

12.6. Painopiste

Maan vetovoima vaikuttaa kappaleen jokaiseen massaelementtiin. Nämä voimat voivat antaa kappaleelle (putoamis)kiihtyvyyttä ja kulmakiihtyvyyttä riippuen kappaleeseen kohdistuvista tukivoimista.

Kappaleen painopiste on se piste, jonka suhteen maan vetovoiman momentti on nolla.

Tarkastellaan kappaleen massaelementtien m_i x-koordinaatteja, kun x-akseli on vaakasuuntainen. Tällöin maanvetovoiman momentti on

$$\tau = \sum \tau_i = w_1(x_1 - x_{CG}) + w_2(x_2 - x_{CG}) + \dots + w_N(x_N - x_{CG}) = 0,$$

missä $w_i = m_i\, g_i$ ja x_{CG} on painopisteen x-koordinaatti. Tästä voidaan ratkaista

$$x_{CG} = (\sum_i w_i x_i) / (\sum_i w_i) \tag{12.16}$$

Ellei kappale ole kovin suuri, on maan vetovoiman voimakkuus $\mathbf{g}$ sama koko kappaleen alueella ($\mathbf{g}_i = \mathbf{g}$). Silloin

$$x_{CG} = (\sum_i m_i x_i) / M, \tag{12.17}$$

missä $M = \sum_i m_i$. Tällöin siis kappaleen painopiste yhtyy kappaleen massakeskipisteeseen.

Kappaleessa 10.1. esitetty massakeskipisteen määrittämismenetelmä perustuu itse asiassa painopisteen ominaisuuksiin ja kyseessä onkin painopisteen määrittäminen.

Statiikan tehtävien ratkaisuohjeita:

1. (a) Piirrä kuva ja määrittele kappale, jonka tasapainoa tarkastelet.
   (b) Piirrä kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat. Päättele kitkavoimien suunta asettamalla ne ensin nolliksi.
2. Valitse koordinaatisto siten, että ...
3. Valitse akseli (tai akselit tai piste ...), jonka suhteen momentit lasketaan.
4. Kirjoita voimien ja momenttien tasapainoyhtälöt ja ratkaise ne.

Esim. 12.12. Tikkaat, joiden pituus on L ja massa M, nojaavat kitkatonta seinää vasten lattialla, jonka lepokitkakerroin tikkaille on μ_s. Määritä suurin kaltevuuskulma θ, jonka tikkaat voivat muodostaa seinän kanssa ja tikkaiden tällöin seinään kohdistama voima.

12.7. Dynaaminen tasapaino

12.8. Pyörimis- ja kiertoliikkeiden liikemäärämomentti

Kappaleessa 11.2 erotettiin kineettisen energian ja hitausmomenttien käsitteiden yhteydessä pyöriminen massakeskipisteen suhteen ja massakeskipisteen (rata)liike. Massakeskipisteen liike voi olla esim. kiertoliikettä. Maapallo esim. pyörii massakeskipisteensä kautta kulkevan akselin ympäri ja samalla kiertää radallaan Auringon ympäri.

Massakeskipisteen kiertoliikkeeseen liittyvä rataliikemäärämomentti on $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{p}_{CM}$ ja massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen tapahtuvan pyörimisen (engl. spin) liikemäärämomentti on $\mathbf{L}_{CM} = I_{CM}\,\omega_{CM}$. Näiden summa on kokonaisliikemäärämomentti

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_O + \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{p}_{CM} + I_{CM}\,\omega_{CM}.$$

Esim. 12.13. Kevyeen kulmanopeudella ω pyörivään levyyn kiinnitettyjen massojen m liikemäärämomentti.

Myös kappaleeseen vaikuttava ulkoisten voimien momentti voidaan jakaa samoin

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_O + \boldsymbol{\tau}_{CM} \qquad (12.18)$$

siten, että

$$\boldsymbol{\tau}_O = d\mathbf{L}_O/dt \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\tau}_{CM} = d\mathbf{L}_{CM}/dt. \qquad (12.19)$$

Siis, eliminoimalla toinen momenteista τ_O ja τ_{CM} saadaan sitä vastaava liikemäärämomentti säilymään. Tällä on paljon sovellutuksia (pyörivän kappaleen asento säilyy).

12.9. Hyrrä

Hyrrä (engl. top) on nopeasti pyörivä symmetrinen kappale. Edellä olevan mukaan se pyrkii säilyttämään pyörimisakselinsa ($\omega \parallel \mathbf{L}_{CM}$) suunnan.

Kun pyörivän hyrrän akselin suuntaa yritetään muuttaa voimaparin avulla, esim. maan vetovoima ja sitä vastaava tukivoima, niin havaitaan, että hyrrä joutuu ns. prekessioliikkeeseen. Oheisen kuvan mukaisesti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r\,\hat{\mathbf{i}} \times (-mg\,\hat{\mathbf{k}}) \\ &= mgr \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} = d\mathbf{L}/dt.\end{aligned}$$

Siten siis pyörimisakselin suunnan ja liikemäärämomentin suunnan muutos on vaakasuoraan suuntaan ja siitä seuraa pyörimisakselin kiertoliike kartiopintaa pitkin. Koska $dL = mgr \sin\theta\, dt$ ja toisaalta $dL = L \sin\theta\, d\phi$, ($L = I\omega$) saadaan prekessioliikkeen kulmataajuudeksi

$$\Omega_p = d\phi/dt = mgr / L. \qquad (12.20)$$

<u>Esim.</u> Millainen on hyrrän prekessioliike silloin kun pyörimisakseli on vaakasuora ja tuettu toisesta päästään?

Prekessioliikkeen yhtälö (12.20) voidaan kirjoittaa muotoon $mgr \sin\theta = \Omega_p L \sin\theta$ ja tästä edelleen muotoon

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{L}. \qquad (12.21)$$

Tässä on jälleen analogia etenevän liikkeen tapaukseen. Samoin kuin momentti $\boldsymbol{\tau}$ muuttaa kappaleen liikemäärämomenttia $\mathbf{L}$ muuttaa voima $\mathbf{F}$ kappaleen liikemäärää $\mathbf{p}$

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \qquad (12.22)$$

Prekessioliikkeen lisäksi hyrrän pyörimisakseli tekee myös ns. nutaatioliikettä.

13. GRAVITAATIO

Pääkohdat:
1. Newtonin gravitaatiolaki
2. Superpositioperiaate
3. Hidas massa ja painava massa
4. (a) Kentän käsite
   (b) Painovoimakentän voimakkuus ja vetovoiman antama kiihtyvyys
5. Keplerin lait
6. Jatkuvasti jakautuneiden massojen painovoima

Gravitaatio- eli painovoimateorian pääpiirteet ovat tulleet esille kattavasti jo aikaisemmissa kappaleissa. Sen vuoksi tehdään tässä vain lyhyt yhteenveto ja joitakin täsmennyksia näihin asioihin.

13.1. Newtonin gravitaatiolaki

Kappaleessa 5.3 esiteltiin jo Newtonin yleinen gravitaatiolaki kahden pistemäisen massan m_1 ja m_2 väliselle vetovoimalle

$$\mathbf{F}_{12} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21}\,, \tag{13.1}$$

missä $G = 6.67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2 on gravitaatiovakio.

13.2. Hidas massa ja painava massa

Klassillisen mekaniikan puitteissa painovoimaan liittyvä painava massa ja kappaleiden liiketilojen muutoksia vastustava hidas massa ovat periaatteessa eri käsitteitä. Kokeellisesti ei kuitenkaan näitä käsitteitä voida erottaa ja siksi ne postuloidaankin klassillisessa mekaniikassa samaksi yleiseksi käsitteeksi, massa.

Näiden massakäsitteiden yhdistäminen inspiroi Einsteinia yleisen suhteellisuusteorian kehittämiseen.

13.3. Gravitaatiokentän voimakkuus

Gravitaatiovuorovaikutuksen (-voiman) välittyminen selitetään massan muodostaman gravitaatiokentän avulla. Massa m kokee toisen massan M muodostaman gravitaatiokentän, jonka voimakkuus on

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{13.3}$$

Tästä seurauksena on painovoima $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$.

13.4. Keplerin lait

Keplerin empiirisesti muotoilemat lait planeettojen liikkeille ovat

1. Planeettojen ratakäyrät ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko.
2. Auringon ja planeetan yhdysjana piirtää yhtä pitkissä ajoissa yhtä suuret pinnat. (Ks. Esim. 12.8)
3. Planeettojen kiertoaikojen neliöt ovat suoraan verrannollisia niiden Auringosta mitattujen keskietäisyyksien kuutioihin. (Ks. kappale 6.3) (13.4)

13.5. Jatkuvat massajakautumat

Jatkuvan massajakautuman painovoimakenttä saadaan integroimalla

$$dg = \frac{G\,dm}{r^2} \tag{13.9}$$

yli koko jakautuman. Eräs tärkeä ja käyttökelpoinen tulos on se, että pallosymmetrisen massajakautuman painovoimakenttä jakautuman ulkopuolella on sama kuin jakautuman keskipisteeseen asetetun samanmassaisen massapisteen painovoimakenttä.

14. KIINTEÄT AINEET, NESTEET JA KAASUT

Pääkohdat:

1. Kiinteän aineen kimmokertoimet: Youngin moduli, leikkausmoduli ja puristusmoduli
2. Pascalin laki
3. Arkimedeen laki
4. Massan säilyminen: jatkuvuus- eli kontinuiteettiyhtälö
5. Bernoullin yhtälö

Aineen kolme olomuotoa ovat kiinteä, neste ja kaasu. Englanninkielessä on temi "fluid", joka tarkoittaa sekä nesteitä että kaasuja. Eri olomuodoissa aineen atomien (tai molekyylien) keskinäiset suhteet ja liiketilat poikkeavat toisistaan. On olemassa myös rajatapauksia, esim. amorfiset aineet, joissa aineen olomuodon määrittely em. tavalla ei ole kovin selvää.

14.1. Tiheys

Arkimedeen sanotaan keksineen käsitteen aineen tiheys

$$\rho = m / V, \qquad (14.1a)$$

eli aineen massa tilavuusyksikköä kohti. Jos tiheys ei ole sama koko kappaleen alueella määritellään

$$\rho = dm/dV, \qquad (14.1b)$$

joka on paikan funktio. Tiheyden SI-yksikkö on kg/m^3.

Aineen tiheys riippuu sen lämpötilasta ja paineesta.

Ominaispaino on aineen tiheyden suhde veden tiheyteen 4°C.

Eräiden aineiden tiheyksiä

Aine	tiheys (kg/m^3)	Aine	tiheys (kg/m^3)
ilma	1.29	vesi	1.0×10^3
H	0.09	puu	$\sim 0.5 \times 10^3$
He	0.18	Al	2.70×10^3
O	1.43	Pt	21.4×10^3

14.2. Kimmokertoimet

kiinteä aine muuttaa muotoaan ulkoisten voimien vaikutuksen alaisena. Jos kappale palaa alkuperäiseen muotoonsa voimen vaikutuksen lakattua, on kappale kimmoinen, esim. jousi. Kun ulkoista voimaa (esim. pinta-alaa kohti) sanotaan jännitykseksi ja suhteellista muodon muutosta myötymäksi, määritellään kimmokerroin yleisesti muodossa

$$\text{kimmokerroin} = \text{jännitys / myötymä.} \qquad (14.2)$$

Youngin moduli on tavallisin kimmokertoimista ja sille käytetään siksi myös pelkkää kimmokerroin-nimeä. Se kuvaa kappaleen, esim. tangon venymistä tai puristumista. Määritellään nyt jännitys

$$\sigma = F/A, \qquad (14.3)$$

missä F on tangon päähän kohdistuva voima ja A on tangon poikkileikkauksen pinta-ala. Suhteellinen venymä on

$$\varepsilon = \Delta L/L, \qquad (14.4)$$

missä L on tangon pituus. Youngin moduli on

$$Y = \sigma / \varepsilon. \qquad (14.5)$$

Mikäli Y on vakio, on kimmovoima suoraan verrannollinen myötymään

$$F/A = Y \, \Delta L/L.$$

Tämä on Hooken laki ja se on voimassa ns. kimmoisuusalueella suhteelisuusrajaan saakka. Kimmoisuusrajalta muodonmuutokset ovat vielä palautuvia, mutta sen jälkeen kappale käyttäytyy elastisesti. Murtorajalla kappale katkeaa.

Leikkausmoduli määritellään kappaleeseen sen pinnan suuntaisen voiman F_t tai leikkausjännityksen

$$\sigma_t = F_t/A$$

ja sen aiheuttaman leikkausmyötymän

$$\varepsilon_t = \Delta x/h$$

avulla. Kiinteän kappaleen leikkausmoduli on nyt

$$S = \sigma_t / \varepsilon_t. \qquad (14.6)$$

Ideaalineste ei voi vastustaa leikkausvoimaa, mutta todellisten nesteiden viskositeetti määritellään juuri niiden kykynä vastustaa leikkausvoiman aiheuttamaa pysyvää muodon muutosta.

Puristusmoduli voidaan määritellä samalla tavalla aineen kaikille olomuodoille. Se määritellään kappaleen kaikkiin pintoihin kohdistuvan kohtisuoran voiman ja sitä vastaavan suhteellisen tilavuuden muutoksen $\Delta V/V$ avulla. Em. voima on helpoimmin kuvattavissa paineen

$$P = F_n/A$$

avulla. Paineen SI-yksikkö on pascal (Pa), 1 Pa $= 1$ N/m^2.

Puristusmoduli määritellään nyt

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}. \qquad (14.7)$$

Näin määriteltynä B on positiivinen suure. Joskus käytetään myös suuretta kompressibiliteetti $k = 1/B$.

Eräiden aineiden kimmokertoimia ($\times 10^9$ N/m^2)

Aine	Y	S	B
Teräs	200	80	140
Alumiini	70	25	70
Betoni	20		
Vesi	–		2.1

14.3. Paine

Nesteissä ja kaasuissa ei esiinny staattisia leikkausvoimia, mutta ne kohdistavat kappaleisiin niiden pintoja vastaan kohtisuoria voimia F_n, jotka ovat verrannollisia pintojen pinta-aloihin A. Nesteen ja kaasun aiheuttama paine on

$$P = F_n/A.$$

Nämä voimat aiheutuvat neste- tai kaasumolekyylien törmäyksistä pintaa vastaan. Paineen SI-yksikkö on pascal (Pa), 1 Pa $= 1$ N/m^2.

Ilmanpaine maanpinnalla on noin 10^5 N/m^2. Se voidaan todeta useilla yksinkertaisilla koejärjestelyillä. Ilmanpaine aiheutuu ilmakehän painosta maan vetovoimakentässä. Siksi se voidaan laskea vaakasuoran pinnan päällä olevan ilmapatsaan painon avulla. Huomaa, että paine on kuitenkin sama kaikissa asennoissa olevia pintoja vastaan.

Edellä olevasta johtuen nesteen ja kaasun paine maan vetovoimakentässä riippuu korkeudesta (mitattuna esim. nesteen pinnasta). Esim. nestepatsaan painosta $W = mgh = \rho Ahg$ saadaan paine $W/A = \rho gh$ ja

$$P = P_0 + \rho gh, \qquad (14.8)$$

missä P_0 on nesteen pinnalla olevan kaasun paine.

Tästä seuraa, että yhtyvissä astioissa nestepintojen korkeus on sama.

Pascalin laki

Edelliseen tulokseen (nesteen paine riippuu vain siitä syvyydestä, jolla painetta mitataan) perustuen Pascal päätteli jo vuonna 1653, että

> **suljetussa astiassa olevaan nesteeseen kohdistuva ulkoinen paine vaikuttaa saman suuruisena kaikkialla nesteessä ja kaikkiin astian seinämiin.**

Tämän periaatteen soveltamiseen perustuu esim. hydraulinen nosturi (tunkki).

Paineen mittaaminen

Kaasun paineen mittaamiseen voidaan käyttää esim. manometriä, jossa käytetään hyväksi nesteen tunnettua tiheyttä ja yhtälöä (14.8). Tällä tavoin saadaan mitatuksi kaasun paine ympäröivän ilmakehän paineen suhteen.

Ilmanpaine voidaan taas mitata barometrillä, joka on tunnetulla nesteellä täytetty ylösalaisin oleva ja yläpäästään suljettu putki.

Paineen mittauksessa käytetään tunnettuna nesteenä usein elohopeaa Hg ($\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3), ja sen avulla määritelläänkin eräs paineen yksikkö, 1 torri = 1 mmHg eli elohopeamillimetri. Edelleen 760 torria = 1 atm = 101.3 kPa eli (normaali-)ilmakehä. Joskus käytetään myös yksikköä 1 at = 1 kp/cm^2 eli teknillinen ilmakehä. Ilmanpaine ilmoitetaan usein yksiköissä bari, 1 b = 10^5 Pa, tai 1 mb = 10^{-3} b.

<u>**Esim.**</u> Ilmanpaineen korkeusriippuvuus.

14.4 Arkimedeen laki

Kokonaan tai osaksi nesteeseen (tai kaasuun) upotettuun kappaleeseen kohdistuu nesteen paineen aiheuttamia voimia. Koska yhtälön (14.8) mukaan paine syvemmällä on suurempi, kappaleeseen kohdistuva nettovoima on ylöspäin. Tämä voima on noste. Nosteen suuruus voidaan päätellä siitä, että kappaleen syrjäyttämä neste (kappaleen tilalla) olisi tasapainossa. Siten

> **nesteessä tai kaasussa olevaan kappaleeseen vaikuttaa noste, joka on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän neste- tai kaasumäärän paino. Nosteen suunta on ylöspäin ja vaikutuspiste on kappaleen syrjäyttämän nesteen painopiste.**

Tämä on Arkimedeen laki, jossa nosteen suuruus on

$$F_B = \rho_f V g, \qquad (14.9)$$

missä ρ_f on nesteen tiheys ja V on kappaleen syrjäyttämän nesteen tilavuus.

Esim. 14.2. Ilmassa punnittuna kruunun massa on 3.0 kg ja veteen upotettuna sen "punnittu paino" on 26 N. Laske kruunun tiheys.

Myös nestettä tiheämpää ainetta oleva kappale voi kellua nesteen pinnalla. Selitä kuinka.

Kelluminen voi olla stabiilia tai labiilia riippuen kelluvan kappaleen painopisteen sijainnista.

14.5. Jatkuvuusyhtälö

Tarkastellaan seuraavassa ideaalinesteen tai kaasun stationääristä ja pyörteetöntä virtausta. Yleisesti, virtaus voi olla pyörteetöntä (laminaarista) tai turbulenttia. Stationäärisessä virtauksessa nesteen virtausnopeus on vakio kaikissa pisteissä. Ideaalineste on kokoonpuristumatonta ja kitkatonta.

Stationäärisessä virtauksessa nestehiukkasen rata on virtausviiva ja hiukkasen nopeus kussakin virtausviivan pisteessä on sen tangentin suuntainen. Virtausviivat eivät leikkaa toisiaan. Virtausviivojen kimppu on vuoputki, jonka pinnan läpi ei tapahdu virtausta.

Hiukkasen nopeus pitkin virtausviivaa voi vaihdella, minkä seurauksena vuoputken poikkileikkauksen pinta-ala muuttuu. Tarkastellaan vuoputken massa-alkiota Δm, joka tulee vuoputkeen ajassa Δt. Tällöin $\Delta m = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$, kun $v_1 \Delta t = \Delta \ell_1$. Kun sama massa poistuu putken toisesta päästä samassa ajassa, sadaan jatkuvuusyhtälö

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \qquad (14.10)$$

joka siis seuraa massan säilymisestä. Jos kyseessä on kokoonpuristumaton neste,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \qquad (14.11)$$

14.6. Bernoullin yhtälö

Tarkastellaan nyt ideaalinesteen laminaarista virtausta putkessa, jonka poikkileikkaus ja korkeus muuttuu kuvan mukaisesti. Aikavälillä Δt neste siirtyy putkessa matkan $\Delta\ell_1$ ja $\Delta\ell_2$ (eri päistä mitattuna). Tällöin paineiden nesteeseen tekemät työt ovat $F_1\Delta\ell_1$ ja $-F_2\Delta\ell_2$, missä $F_i = P_iA_i$. Mekaanisen energian säilymisen perusteella voidaan kirjoittaa

$$P_1A_1\Delta\ell_1 - P_2A_2\Delta\ell_2 = mgy_2 - mgy_1 + 1/2\ mv_2^2 - 1/2\ mv_1^2$$

eli

$$P_1\ m/\rho + mgy_1 + 1/2\ mv_1^2 = P_2\ m/\rho + mgy_2 + 1/2\ mv_2^2,$$

josta saadaan Bernoullin yhtälö (Daniel Bernoulli, v. 1738)

$$P_1 + \rho g y_1 + 1/2\ \rho v_1^2 = \text{vakio}. \qquad (14.12)$$

Virtaavassa nesteessä siis staattinen paine P, hydrostaattinen paine ρgh ja dynaaminen paine eli patopaine $1/2\ \rho v^2$ yhteenlaskettuna antavat vakion.

Esim. 14.3. Astian kyljessä on reikä ja vettä korkeudelle h reiästä mitattuna. Millä nopeudella vesi juoksee reiästä?

Bernoullin yhtälön sovellutuksia

Venturimetri

Pitot-putki

Lentokoneen siipi

Kaasun purkautuminen säiliöstä

15. VÄRÄHDYSLIIKE

Pääkohdat:
1. Harmonisen oskillaattorin amplitudi ja jaksonpituus
2. Harmonien voima
3. Oskillaattorin kineettinen ja potentiaalienergia
4. Matemaattinen heiluri, fysikaalinen heiluri ja torsioheiluri

Toistuvaa ilmiötä tai liikettä sanotaan jaksolliseksi ja edestakaista liikettä sen lisäksi värähdysliikkeeksi tai oskillaatioksi. Mekaaninen värähtely on jonkin kappaleen tai sen osan edestakaista etenemis- tai pyörimisliikettä. Värähtely on yleensä vaimenevaa, jolloin sen liikkeen laajuus pienenee. Pakotettua värähtelyä pitää yllä jokin jaksollinen ulkoinen voima, jolloin voi esiintyä myös resonanssi-ilmiöitä.

15.1. Harmoninen oskillaattori

Tarkastellaan jouseen kiinnitetyn kappaleen värähtelyä. Liikkeen laajuutta kuvataan amplitudilla A, kun $-A < x < A$. Jos jaksonpituus on T, niin $f = 1/T$ on värähtelyn taajuus. Tällaisen värähtelijän paikka ajan t funktiona on

$$x(t) = A \sin(\omega t+\phi),$$

missä kulmataajuus

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f \tag{15.1}$$

ja ϕ on vaihekulma tai vaihevakio. Termi $\omega t+\phi$ on värähtelyn vaihe. Tämä on esimerkki yksinkertaisesta harmonisesta oskillaattorista.

Yksinkertaisen harmonisen oskillaattorin ominaisuuksia:

1. Amplitudi on vakio (yksinkertainen)
2. Taajuus (tai jaksonpituus) on riippumaton amplitudista
3. Värähtely on sini-muotoista ja sillä on vain yksi taajuus (harmoninen)

Harmonisen oskillaattorin
$x(t) = A \sin(\omega t+\phi)$ nopeus
$v(t) = dx/dt = \dot{x}(t)$ ja kiihtyvyys
$a(t) = d^2x/dt^2 = \ddot{x}(t)$ ovat

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t+\phi) \tag{15.3}$$

ja

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t+\phi). \tag{15.4}$$

Tästä nähdään, että
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ eli $a = -\omega^2 x$ tai

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{15.5}$$

Tämä on harmonisen liikkeen differentiaaliyhtälö.

15.2. Harmoninen voima

Harmoniselle liikkeelle on siis voimassa $a \propto -x$ ja koska massapisteen dynamiikalle on voimassa $F = ma$, on massapisteen m harmonisen liikkeen aiheuttava voima muotoa $F \propto -x$.

Tällainen on harmoninen voima on siis mm. jousivoima $F_{sp} = -kx$, josta tulee liikeyhtälöksi $ma = -kx$ eli

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \tag{15.6}$$

Tällöin siis $\omega^2 = k/m$ ja

$$\omega = \sqrt{(k/m)} \tag{15.7}$$

ja

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{(m/k)}. \tag{15.8}$$

15.3. Harmonisen oskillaattorin energia

Harmonisen oskillaattorin potentiaalienergia on

$$U = 1/2\, kx^2$$
$$= 1/2\, kA^2 \sin^2(\omega t+\phi) \quad (15.9)$$

ja kineettinen energia on

$$K = 1/2\, mv^2 \quad (15.10)$$
$$= 1/2\, m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t+\phi)$$

ja kokonaisenergia on vakio

$$E = 1/2\, mv^2 + 1/2\, kx^2$$
$$= 1/2\, mv_{max}^2 + 1/2\, kA^2, \quad (15.11)$$

kuten kappaleessa 8.5 jo todettiin.

Yleisesti, parabolisessa potentiaalissa $U \propto x^2$ värähtelevä hiukkanen on harmoninen oskillaattori. Tätä käytetään mallina mm. molekyylien värähtelylle.

Esim. 15.6. Johda harmonisen liikkeen liikeyhtälö sen kokonaisenergian lausekkeesta.

15.4. Heilurit

Matemaattinen heiluri

Kun matemaattisen heilurin pituus on L, liikeyhtälöksi tulee $m\ddot{s} = -mg \sin\theta$. Kun pienillä amplitudeilla voidaan approksimoida $\sin\theta \approx \theta$ ja sijoitetaan vielä $s = L\theta$, saadaan

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (15.12)$$

Nyt siis $\omega^2 = g/L$ ja $\omega = \sqrt{(g/L)}$ ja

$$T = 2\pi \sqrt{(L/g)}. \quad (15.13)$$

Siten

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t+\phi). \quad (15.14)$$

Huomaa, että ω, on heilahtelun kulmataajuus, joka on vakio, eikä liikkeen kulmanopeus $d\theta/dt$ ($\neq$ vakio).

Fysikaalinen heiluri

Kappale, jonka hitausmomentti ripustuspisteen suhteen on I ja painopisteen etäisyys ripustuspisteestä on d, muodostaa fysikaalisen heilurin. Sen liikeyhtälö $I\alpha = \tau = -mgd \sin\theta$ on

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0. \quad (15.15)$$

Nyt $\omega^2 = mgd/I$ ja

$$\omega = \sqrt{(mgd/I)} \quad (15.16)$$

ja

$$T = 2\pi \sqrt{(I / mgd)}. \quad (15.17)$$

Jos matemaattisen tai fysikaalisen heilurin amplitudi on suuri, ei approksimaatio $\sin\theta \approx \theta$ ole hyvä ja eikä liike ole enää likimain harmonista. Tällöin liikkeen jaksonpituus kasvaa ja

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right),$$

missä T_0 on vastaavan harmonisen liikkeen jaksonpituus ja θ_0 on amplitudia vastaava heilahduskulma.

Torsioheiluri
Lankaan ripustettu kappale, joka kiertyy lankaa pitkin kulkevan akselin ympäri muodostaa torsioheilurin. Langan kiertymistä vastustava momentti noudattaa Hooken lakia $\tau = -\kappa\theta$, missä κ on torsiovakio. Torsioheilurin liikeyhtälöksi $I\alpha = \tau$ tulee siten

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0.$$

Tästä seuraa, että $\omega^2 = \kappa/I$ ja

$$\omega = \sqrt{(\kappa/I)} \qquad (15.18)$$

ja

$$T = 2\pi\sqrt{(I/\kappa)}. \qquad (15.19)$$

Huomaa, että torsioheilurin tapauksessa ei tarvita pienen kulman approksimaatiota.

15.5. Vaimeneva värähtely

Väliaineessa liikkuvaan kappaleeseen kohdistuva kitkan luonteinen ns. väliaineen vastus $\mathbf{f}$ on kappaleen nopeuteen $\mathbf{v}$ verrannollinen, $\mathbf{f} = -\gamma\mathbf{v}$, jos nopeus ei ole kovin suuri. Harmonisen värähtelyn (1-dim.) liikeyhtälö on silloin $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$ eli

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

15.6. Pakotettu värähtely

Värähtelyä voi pitää yllä jokin ulkoinen jaksollinen voima, jolloin liikettä sanotaan pakotetuksi värähtelyksi. Jos ulkoinen voima on $F(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$ ja väliaineen vastus on $f = -\gamma x$, tulee liikeyhtälöksi $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \cos(\omega_e t)$ eli

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0\cos(\omega_e t). \qquad (15.25)$$

Jos $\omega_e = \omega_0 = \sqrt{(k/m)}$, saa pakotettu liike suurimman amplitudinsa. Sitä sanotaan resonanssiksi.