1. JOHDANTO

Pääkohdat:

1. Käsitteiden malli, periaate ja teoria merkitys
2. SI-yksikköjärjestelmä
3. Suureiden esitystarkkuus
4. Dimensioanalyysi
5. Suorakulmainen ja napakoordinaatisto

1.1. Mitä fysiikka on?

Fysiikka on kokeellinen luonnontiede. Fysiikka tutkii luontoa sekä sen ilmiöitä, ja pyrkii löytämään näistä säännönmukaisuuksia ja mahdollisimman syvällisiä lainalaisuuksia. Nämä kuvataan täsmällisten käsitteiden ja niiden välisten riippuvuuksien avulla. Fysiikan ja erityisesti mekaniikan peruskäsitteistö on muodostunut ihmisen jokapäiväisen ympäristön ja sen ilmiöiden pohjalta. Uudet ja monimutkaisemmat käsitteet voidaan määritellä peruskäsitteistä lähtien. Kaikista näistä seikoista johtuen fysiikka on eksakti luonnontiede, joka on perustana muille luonnontieteille ja useimmille soveltaville tieteille.

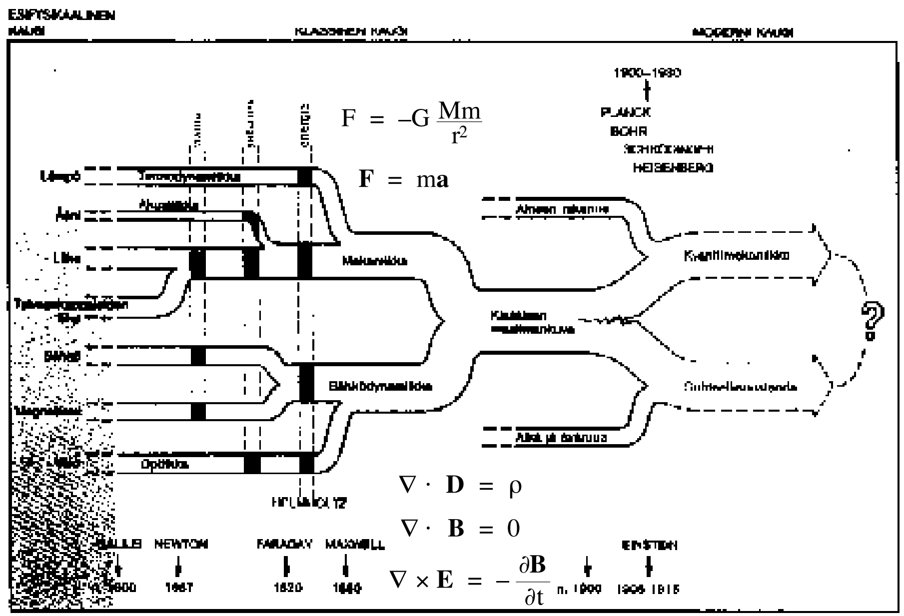
Aineen rakenteen ja ominaisuuksien selittäminen on fysiikan keskeinen tehtävä. Tähän tarvitaan tietoa aineen perusosasista, ns. alkeishiukkasista, ja niiden välisistä vuorovaikutuksista. Nämä ovat yksinkertaisimmat mahdolliset lähtökohdat, joihin perustuen voidaan selittää ja ennustaa luonnonilmiöitä.

Tämän hetken tietämyksen mukaan aine koostuu kvarkeista ja leptoneista. Perusvuorovaikutuksia on neljä:

vahvavuorovaikutus
sähkömagneettinen vuorov.
heikkovuorovaikutus
gravitaatio

Mittaaminen on täsmällistä havaintojen tekoa. Mittaustuloksia tulkitaan mallien avulla. Nämä kaksi asiaa ovat keskeisiä (kokeellisen ja teoreettisen) fysiikan menetelmiä. Havaintojen tekeminen aistien avulla on yksinkertaisinta mittaamista. Ihmisen "välittömään" havaintomaailmaan liittyvät ilmiöt kuuluvat ns. klassisen fysiikan piiriin.

Klassinen fysiikka voidaan jakaa kahteen päähaaraan, mekaniikkaan ja sähkömagnetismiin (tai sähködynamiikkaan), jotka olivat kehittyneet jo 1900-luvulle tultaessa. Mekaniikka tarkastelee kappaleiden ja nesteiden liikettä ja dynamiikkaa, sekä mm. mekaanisia aaltoja. Mekaniikkaan voidaan lukea myös termodynamiikka, jonka makroskooppiset ilmenemismuodot liittyvät lämpötilaan, lämpöenergiaan ja sen siirtymiseen. Sähkömagnetismiin kuuluvat sähköiset ja magneettiset ilmiöt, sähkömagneettiset aallot ja siten myös optiikka.



$$F = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Samoihin aikoihin, kun klassinen fysiikka kypsyi nykyiseen muotoonsa, uudet mittaukset, jotka kohdistuivat ihmisen välittömän havaintomaailman ulkopuolelle, esim. valonnopeuteen ja "atomaarisiin tapahtumiin", toivat esiin ilmiöitä, joita ei voitu ymmärtää klassisen fysiikan avulla. Tämän seurauksena on kehittynyt tällä vuosisadalla ns. moderni fysiikka, johon kuuluvat suhteellisuusteoria ja kvanttiteoria. Ns. erikoinen suhteellisuusteoria tarkastelee suurella nopeudella liikkuvia kappaleita ja yleinen suhteellisuusteoria tarkastelee gravitaation ja avaruuden rakenteen välisiä suhteita. Kvanttiteoria taas selittää "atomitason" ilmiöitä: rakenteita, dynamiikkaa ja energianvaihtoprosesseja.

Modernin fysiikan ilmiöitä ei voida ei voida tarkastella käyttäen vain klassisen fysiikan käsitteitä ja suureita, jotka on johdettu ihmisen havaintomaailmasta. Tämä tekee modernista fysiikasta mielenkiintoisen ja haasteellisen.

1.2. Suureet, mallit ja teoriat

Fysiikassa käytetään käsitteitä suure, laki, periaate, malli ja teoria, joista osa jo edellä tulikin esille.

Suure

Fysikaaliset suureet voidaan muodostaa havintomaailman perusteella, esim. pituus, massa, aika ja nopeus, tai suureen mittaamiseen perustuen, esim. sähkövaraus, magneettikenttä, energia. Jälkimmäiselläkin tavalla muodostettujen suureiden on oltava tietysti yhteensopivia havaintojen kanssa, esim. lämpötila, paine ja voima.

Suure on ominaisuus, joka voidaan mitata tai laskea. Fysikaaliset suureet määritellään joko tiettyyn mittaukseen perustuen (perussuureet) tai toisten suureiden avulla (johdannaissuureet).

Laki ja periaate

Fysiikan laki märittelee fysikaalisten suureiden välisiä riippuvuuksia tietyssä tilanteessa. Tällaiset lait kirjoitetaan tavallisesti matemaattisten yhtälöiden muotoon. Periaate on lakia yleisempi eikä sitä voi pukea yhden yhtälön muotoon, esim. energiaperiaate.

Malli

Malli on kuvaus tarkasteltavasta fysikaalisesta systeemistä. Esim. massapiste painovoimakentässä on putoavan kappaleen malli. Mallin tulisi sisältää kaikki oleelliset systeemin ominaisuudet, mutta samalla olla kuitenkin riittävän yksinkertainen, jotta halutut asiat voidaan ratkaista mallin avulla. Mallia voidaan täydentää tai muuttaa tarvittaessa.

Hyvän mallin avulla voidaan myös simuloida tarkasteltavaa systeemiä.

Teoria

Teoria koostuu perusolettamuksista eli postulaateista, periaatteista, mallista sekä näistä seuraavista laeista. Teorian (mallin) tulisi kyetä ennustamaan suoritettavien kokeiden tuloksia, ainakin tietyllä tarkkuudella. Esim. Newtonin painovoimateoria ennustaa taivaankappaleiden liikkeet tietyllä tarkkuudella.

1.3. Mittayksiköt

Fysikaalisia suureita mitataan näiden yksiköillä (eli mittayksiköillä). SI-järjestelmän perussuureet ja niiden yksiköt on esitetty oheisessa taulukossa.

Perussuure		Perusyksikkö	
nimi	**tunnus**	**nimi**	**tunnus**
pituus	s, l, d, r, ...	metri	m
massa	m, M	kilogramma	kg
aika	t, T, τ	sekunti	s
sähkövirta	I, i	ampeeri	A
lämpötila	T	kelvin	K
valovoima	I	kandela	cd
ainemäärä	n	mooli	mol

SI-järjestelmän 7 perusyksikköä määritellään seuraavasti:

Metri m (1983)
Metri on matka, jonka sähkömagneettinen säteily kulkee $1 / 299\,792\,458$ s aikana tyhjiössä.

Kilogramma kg (1889 ja 1901)
Kilogramma on yhtäsuuri kuin kansainvälisen kilogramman prototyypin massa. (Yhden ^{12}C-atomin massaksi on mitattu $u = 1.660\,540\,2(10) \times 10^{-27}$ kg)

Sekunti s (1967)
Sekunti on $9\,192\,631\,770$ kertaa sellaisen säteilyn jakson aika, joka vastaa ^{133}Cs-atomin siirtymää perustilan ylihienorakenteen kahden energiatason välillä.

Ampeeri A (1948)
Ampeeri on ajallisesti muuttumaton sähkövirta, joka kulkiessaan kahdessa suorassa yhdensuuntaisessa, äärettömän pitkässä ja ohuessa johtimessa, joiden poikkileikkaus on ympyrä ja jotka ovat 1 metrin etäisyydellä toisistaan tyhjiössä, aikaansaa johtimien välille 2×10^{-7} N suuruisen voiman johtimen metriä kohti.

Kelvin K (1967)
Kelvin on $1 / 273.16$ veden kolmoispisteen termodynaamisesta lämpötilasta.

Kandela cd (1979)
Kandela on sellaisen säteilijän valovoima, joka tiettyyn suuntaan lähettää monokromaattista 540×10^{12} Hz taajuista säteilyä ja jonka säteilyintensiteetti tähän suuntaan on $1/683$ W steradiaania kohti.

Mooli mol (1971)
Mooli on sellainen systeemin ainemäärä (hiukkasmäärä), joka sisältää yhtä monta keskenään samanlaista perusosasta kuin on $0{,}012$ kg:ssa ^{12}C-atomeja. Tämä on Avogadron luku N_A. Hiukkaset voivat olla mm. atomeja, molekyylejä, tms. 1 mol = $6.022\,136\,7(36) \times 10^{23}$ kpl.

SI-järjestelmän täydennysyksiköitä ovat:

Radiaani rad (1965)
Radiaani on r-säteisen ympyrän kahden sellaisen säteen välinen kulma, jotka ympyrän kehästä erottavat säteen r pituisen kaaren.

Steradiaani sr (1965)
Steradiaani on avaruuskulma, joka sen kärjen sijaitessa r-säteisen pallon keskipisteessä leikkaa pallon pinnasta alan r^2.

Lisäksi käytetään mm. tavanomaisia ajan yksiköitä min, h ja d.

SI-järjestelmästä ja sen mittayksiköistä kerrotaan tarkemmin "Fysikaaliset mittaukset I"-kurssin luennoilla.

1.4. Etuliitteet ja merkitsevät numerot

SI-järjestelmän etuliitteet, niiden symbolit ja niitä vastaavat kertoimet on annettu alla olevassa taulukossa.

kerroin	etuliite	symboli	kerroin	etuliite	symboli	kerroin	etuliite	symboli
10^{24}	yotta	Y	10^{3}	kilo	k	10^{-6}	mikro	µ
10^{21}	zetta	Z	10^{2}	hehto	h	10^{-9}	nano	n
10^{18}	exa	E	10^{1}	deka	da	10^{-12}	piko	p
10^{15}	peta	P	10^{0}			10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-1}	desi	d	10^{-18}	atto	a
10^{9}	giga	G	10^{-2}	sentti	c	10^{-21}	zepto	z
10^{6}	mega	M	10^{-3}	milli	m	10^{-24}	yocto	y

Kymmenen potensseja tai etuliitteitä käytettäessä on merkitsevien numeroiden ilmaiseminen yksinkertaista, ellei ilmoitettavan lukuarvon tarkkuutta (tai virhettä) ilmaista samalla.

Huomaa merkitsevien numeroiden "säilyminen" toisaalta kahden luvun kerto- ja jakolaskussa (pienin), ja toisaalta kahden luvun yhteen ja vähennyslaskussa (suurin desimaali).

1.5. Suuruusluokat

Suureiden suuruusluokkien arvioimiseksi voidaan "laskemisessa" käyttää esim. yhden numeron tarkkuuksia tai jopa vain kymmenen potensseja.

Esim. 1.1. Sydämen tahdistimen suunnittelussa tarvitaan arvio tai yläraja, sille kuinka monta kertaa hoidettavan henkilön sydän lyö tahdistimen asennuksen jälkeen. Arvioi tämä 20 vuotiaalle potilaalle.

1.6. Dimensioanalyysiä

Suureen dimensioksi sanotaan tämän riippuvuutta käytetyn yksikköjärjestelmän perussuureista (tai perusyksiköistä). Dimensioanalyysiä voidaan käyttää joskus hyväksi tarkasteltaessa suureiden välisiä riippuvuuksia.

Esim. 1.2. Matemaattisen heilurin jakson pituuden T pääteltään riippuvan sen pituudesta ℓ, punnuksen massasta m ja maan vetovoiman kiihtyvyydestä g. Selvitä dimensioanalyysin avulla kuinka?

1.7. Koordinaatistoista

Kaksiulotteisen suorakulmaisen (Cartesian) koordinaatiston koordinaattien ja napakoordinaattien väliset muunnokset ovat

$$x = r\cos\varphi \qquad (1.1)$$

$$y = r\sin\varphi \qquad (1.2)$$

ja

$$r = \sqrt{(x^2+y^2)} \qquad (1.3)$$

$$\tan\varphi = y / x. \qquad (1.4)$$

Vastaavat muunnokset kolmiulotteisessa tapauksessa suorakulmaisen ja pallokoordinaatiston välillä ovat

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

ja

$$r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\tan\varphi = y / x$$

$$\cos\theta = z / r.$$

2. VEKTORIT

Pääkohdat:
1. Skalaarien ja vektoreiden ero
2. a. Vektorin komponentit ja yksikkövektori
   b. Vektorien yhteenlasku
3. a. Vektorien skalaari- eli pistetulo
   b. Vektori- eli ristitulo

2.1. Skalaarit ja vektorit

Eräät fysikaaliset suureet voidaan ilmoittaa lukuarvon (merkkeineen) ja yksikön avulla. Tällaisia ovat esimerkiksi kahden tapahtuman aikaväli, kappaleen massa ja lämpötila tietyssä paikassa. Nämä ovat skalaarisuureita. Skalaarit noudattavat tavallisia laskusääntöjä.

Toisten suureiden määrittelemiseksi tarvitaan edellisten lisäksi myös suunta, esim. nopeus, voima ja sähkökenttä tietyssä paikassa. Nämä ovat vektorisuureita. Vektorit noudattavat ns. vektorialgebraa.

Vektoreita merkitään yleensä lihavilla kirjaimilla tai merkitsemällä symbolin päälle viiva tai nuoli. Piirroksissa vektoreita merkitään nuolilla.

Vektorisuureen itseisarvolla tarkoitetaan sen suuruutta, kun suuntaa ei määritellä. Se on siis skalaarisuure. Vektorin $\mathbf{A}$ itseisarvo $|\mathbf{A}|$ merkitään tavallisesti A. Tätä kutsutaan myös vektorin $\mathbf{A}$ normiksi.

2.2. Vektorien yhteenlasku

Vektorien yhteenlasku voidaan tehdä piirtämällä vektorit peräkkäin. Fysikaalisten vektorisuureiden yksiköiden on oltava samat, jotta ne voidaan laskea yhteen. Vektorien summaa sanotaan resultantiksi ja se on myös vektori, jonka yksikkö on sama kuin yhteenlaskettavien vektoreiden yksikkö. Esim.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Resultanttivektorin suuruus voidaan laskea joko geometrian tai trigonometrian menetelmin.

Vektoreiden yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, eli

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

ja

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Vektorin $\mathbf{A}$ vastavektoriksi sanotaan vektoria, jonka suuruus on sama, mutta suunta vastakkainen, kuin vektorin $\mathbf{A}$. Vektorin $\mathbf{A}$ vastavektoria merkitään $-\mathbf{A}$. Vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ erotuksella (vähennyslaskulla) tarkoitetaan summaa

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

2.3. Vektorin komponentit ja yksikkövektorit

Vektorien yhteenlasku graafisesti on työlästä ja epätarkkaa. Lisäksi se on eritysen hankalaa (mahdotonta) kolmiulotteisessa avaruudessa. Tarkastellaan seuraavaksi vektorien komponenttiesitystä, jota käyttäen "vektoreilla laskeminen" on suoraviivaista.

Vektorin $\mathbf{A}$ projektiot suorakulmaisen koordinaatiston x- ja y-akseleille määräävät yksikäsitteisesti vektorin $\mathbf{A}$ suuruuden ja suunnan. Yhtälöiden (1.1) – (1.4) mukaan

$$A_x = A \cos \varphi \qquad (2.1a)$$

$$A_y = A \sin \varphi \qquad (2.1b)$$

ja

$$A = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)} \qquad (2.2)$$

$$\tan \varphi = A_y / A_x. \qquad (2.3)$$

Huomaa, että nämä yhtälöt määrittelevät vektorin $\mathbf{A}$ komponentit A_x ja A_y merkkeineen. Kolmi- tai useampiulotteisessa avaruudessa kaikki vektorin komponentit määritellään samalla tavoin projektioina vastaaville koordinaattiakseleille.

Vektorien yhteenlaskussa summa- eli resultanttivektorin komponentit saadaan laskemalla yhteen summattavien vektorien komponentit. Siis yhteenlaskulle

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

saadaan

$$R_x = A_x + B_x \qquad (2.4a)$$

ja

$$R_y = A_y + B_y. \qquad (2.4b)$$

Edelleen

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} \qquad (2.5)$$

ja

$$\tan \varphi = R_y / R_x = (A_y + B_y) / (A_x + B_x). \qquad (2.6)$$

Esim 2.1. Suunnistaja juoksee ensin 500 m matkan koilliseen (37° pohjoiseen idästä) ja sitten 1 km matkan luoteeseen (60° länteen pohjoisesta). Mihin hän on siirtynyt lähtöpaikkaansa nähden?

Vektori voidaan esittää täsmällisesti joko antamalla sen suunta ja suuruus tai antamalla kaikki sen komponentit. Mikäli tunnetaan vektorin komponentit koordinaattiakselien suuntiin, voidaan vektori esittää myös muodossa

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} = (A_x, A_y, A_z) \qquad (2.7)$$

missä vektorit $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ ja $\hat{\mathbf{k}}$ ovat koordinaattiakselien x, y ja z suuntaisia yksikkövektoreita, joiden pituus on yksi,

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1.$$

Yksikkövektorin merkkinä voidaan käyttää ns. hattua vektorin päällä.

Yksikkövektoreita voidaan merkitä myös $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{e}}_x = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{e}}_y = (0, 1, 0)$ ja $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_z = (0, 0, 1)$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$A = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)}. \qquad (2.8)$$

Vektorien summa ja erotus voidaan esittää kätevästi yksikkö-vektorien avulla,

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y \pm B_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_z \pm B_z)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Huomaa, että kaksi vektoria ovat samat täsmälleen silloin, kun niiden kaikki komponentit ovat samoja.

Esim. 2.2. Tyttö kävelee ensin 3 m itään ja sitten 4 m etelään. Mikä on kokonaissiirtymä?

Esim. 2.3. Laske a) $A + B$, b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ ja c) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, kun $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 6\,\hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\,\hat{\mathbf{k}}$.

2.4. Vektorien skalaari- eli pistetulo

Kahden vektorin skalaari- eli pistetulo määritellään

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\,B\cos\theta, \qquad (2.9)$$

missä θ on vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ välinen kulma. Tulo on siis skalaari ja tulkittavissa geometrisesti vektorin pituuden ja toisen vektorin projektion tuloksi.

Pistetulolle on voimassa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C},$$
$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \qquad (2.10)$$

Vektorin komponentteja käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \qquad (2.11)$$

Osoitetaan edellinen:

Esim. 2.4. Laske vektorien $\mathbf{A} = 8\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\,\hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}$ skalaaritulo.

Esim. 2.5. Määritä vektorien $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$ välinen kulma.

Esim. 2.6. Johda kosinilause pistetulon avulla.

2.5. Vektori- eli ristitulo

Kahden vektorin vektori- eli ristitulo määritellään

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A\,B \sin\theta\, \hat{\mathbf{n}}, \tag{2.12}$$

missä θ on vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ välinen kulma ja $\hat{\mathbf{n}}$ on molempia vektoreita vastaan kohtisuora yksikkövektori. Suunnan voi määrätä esim. oikean käden säännöllä:
peukalo × etusormi = keskisormi.

Vektoritulo ei ole vaihdannainen vaan

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Lisäksi

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0\,,$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\,, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}\,, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\,,$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\,\hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\,\hat{\mathbf{i}}\,, \qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Näitä sääntöjä käyttäen kahden vektorin ristitulon voi laskea myös komponenteittain.

Vektoritulon laskemisen voi kuitenkin tehdä helpoimmin käytten determinanttiesitystä

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Esim. 2.7. Laske vektorien $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 2\,\hat{\mathbf{k}}$ vektoritulo.

Esim. 2.8. Johda sinilause ristitulon avulla.

3. SUORAVIIVAINEN LIIKE

Pääkohdat:

1. a. Vauhti, nopeus ja kiihtyvyys
   b. Hetkelliset suureet ja keskiarvosuureet
2. Liikkeen graafinen esitys:
   a. Hetkellisten suureiden määrääminen tangentin avulla
   b. Keskiarvosuureiden määrääminen pinta-alan avulla
3. Tasaisesti kiihtyvä suoraviivainen liike
4. Vapaa putoaminen

3.1. Kinematiikka

Kappale voi olla erilaisissa liiketiloissa. Tavallisimpia ovat etenevä liike, pyörimisliike ja värähdysliike. Etenevää liikettä voidaan tarkastella suoraviivaisena yhdessä dimensiossa, esim. x-akselilla. Tällöin riittää tarkastella kappaleen yhtä pistettä, esim. painopistettä ja kappaleen mallina voidaan käyttää massapistettä eli hiukkasta.

Kinematiikka tarkastelee hiukkasen paikan muutosta ajan funktiona. Hiukkasen paikka ajan funktiona on sen rata eli ratakäyrä.

3.2. Matka ja nopeus

Tarkastellaan hiukkasen liikettä x-akselilla, joka voi kuvata esim. auton liikettä suoralla tiellä. merkitään hiukkasen paikkaa liikkeen alussa ja lopussa x_i ja x_f, sekä näiden erotusta

$$\Delta x = x_f - x_i. \qquad (3.1)$$

Suure Δx on siirtymä (dispalcement), erotuksena käsitteestä matka (distance), jolla tarkoitetaan tavallisesti liikkeen radan pituutta. Nämä kaksi käsitettä poikkeavat toisistaan mm. edestakaisen tai käyräviivaisen liikkeen tapauksessa.

Kun tunnetaan liikkeeseen käytetty aika, määritellään, että

$$\text{keskimääräinen vauhti} = \text{matka / aika}, \qquad (3.2)$$

joka on positiivinen skalaari. Kun merkitään liikkeeseen käytettyä aikaa $\Delta t = t_f - t_i$, määritellään keskinopeus

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad (3.3)$$

joka taas on luonteeltaan vektorisuure (useampiulotteisessa tapauksessa). Sekä vauhdin että nopeuden yksikkö on m/s.

Esim. 3.1. Lintu lentää itään päin 10 m/s 100 m matkan ja kääntyy sitten takaisin ja lentää tulosuuntaansa 20 m/s 15 s ajan. Laske linnun keskimääräinen vauhti ja keskinopeus.

Esim. 3.2. Lenkkeilijä juoksee ensin 100 m 5 m/s ja sitten edelleen samaan suuntaan 100 m 4 m/s. Mikä on hänen keskinopeutensa?

Esitetään
edellisten
esimerkkien
siirtymä ajan
funktiona
graafisesti.

3.3. Hetkellinen nopeus

Hiukkasen keskinopeus tai -vauhti ei kerro paljoa siitä, miten hiukkanen on kullakin ajanhetkellä liikkunut. Kun lyhennetään tarkasteluaikavälin pituutta Δt saadaan, saadaan tästä parempi kuva. Hiukkasen hetkellinen nopeus x-akselilla määritelläänkin raja-arvona

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

Vaikka Δx ja Δt ovat hyvinkin pieniä niiden suhde lähestyy tiettyä arvoa, joka vastaa graafisesessa $x = x(t)$ esityksessä käyrän tangenttia. Tämä voidaan kirjoittaa derivaattana

$$v = \frac{dx}{dt} . \qquad (3.5)$$

Kyseessä on siis matkan muutosnopeus ajan funktiona.

Esim. 3.3. Hiukkasen paikka x-akselilla ajan t funktiona on $x(t) = 3\,t^2$ m. Määrää hiukkasen keskinopeus hetkellä $t = 2$ s ja keskinopeus 4 ensimmäisen sekunnin aikana.

3.4. Kiihtyvyys

Samoin kuin nopeus kuvaa matkan muutosta ajassa kuvaa kiihtyvyys nopeuden muutosta ajassa. Keskimääräinen kiihtyvyys eli keskikiihtyvyys on siten

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} , \qquad (3.6)$$

jonka SI-yksikkö on m/s^2. Edelleen samoin kuin edellä hetkellinen nopeus, niin myös hetkellinen kiihtyvyys määritellään derivaattana

$$a = \frac{dv}{dt} . \qquad (3.7)$$

Myös graafinen tulkinta tangenttina, nyt funktiolle $v = v(t)$, on samanlainen kuin edellä.

Huomaa, että positiivinen tai negatiivinen kiihtyvyys ei kerro vielä mitään nopeuden merkistä. Siten esim. negatiivinen kiihtyvyys ei tarkoita välttämättä hidastuvaa liikettä.

Esim. 3.4. Hetkellä $t = 0$ auto liikkuu itään nopeudella 10 m/s. Laske auton keskikiihtyvyys, kun hetkellä (a) $t = 2$ s sen nopeus on 15 m/s itään, (b) $t = 5$ s 5 m/s itään, (c) $t = 10$ s 10 m/s länteen ja (d) $t = 20$ s 20 m/s länteen.

3.5. Graafinen derivointi ja integrointi

Edellä tarkasteltua derivaatan määrittämistä käyrän tangentin avulla voidaan sanoa graafiseksi derivoinniksi. Siten saadaan siis nopeus matkasta ja kiihtyvyys nopeudesta. Myös kääntäen voidaan nopeus saada kiihtyvyydestä ja matka nopeudesta graafisella tarkastelulla. Sitä voidaan kutsua vastaavasti graafiseksi integroinniksi.

Tarkastellaan viereisen kuvan mukaisesti nopeutta ajan funktiona, $v = v(t)$. Koska $v = \Delta x / \Delta t$ kullakin jakovälillä, niin $\Delta x = v\ \Delta t$ ja kuljettu matka (tai siirtymä) saadaan laskemalla yhteen kaikki välit, $x = \sum_i \Delta x_i$. Kullakin aikavälillä voidaan käyttää sen keskinopeutta $v = v_{av}$. Summa $x = \sum_i \Delta x_i$ on itseasiassa kuvan pylväiden tai puolisuunnikkaiden yhteenlaskettu pinta-ala, joka kuvaa käyrän $v = v(t)$ alle jäävää pinta-alaa sitä tarkemmin mitä kapeampia jakovälit Δt ovat.

Mikäli nopeuden muutos on vakio eli kuvaaja on suora, tulee graafisesta tarkastelusta helppo ja tulos on riippumaton jakovälien pituudesta. Tällöin

$$\Delta x = v_{av}\,\Delta t = 1/2\,(v_i+v_f)\,\Delta t, \qquad (3.8)$$

missä v_i ja v_f ovat alku- ja loppunopeudet välillä Δt. Tällaista liikettä sanotaan tasaisesti kiihtyväksi liikkeeksi.

Yhteenveto graafisesta derivoinnista ja integroinnista:

<u>Esim. 3.5.</u> Hetkellä $t = 0$ hiukkanen on levossa origossa. Sen jälkeen sen kiihtyvyys on 2 m/s^2 3 s ajan ja -2 m/s^2 seuraavan 3 s ajan. Esitä $x(t)$, $v(t)$ ja $a(t)$ graafisesti.

3.6. Tasaisesti kiihtyvä suoraviivainen liike

Kun kiihtyvyys a on vakio, voidaan yhtälön (3.8) $\Delta x = v_{av}\,\Delta t$ tavoin kirjoittaa $\Delta v = a\,\Delta t$. Jos ajanhetkellä $t = 0$ hiukkasen nopeus on v_0, niin $v = v_0 + \Delta v$ ja $t = \Delta t$, jolloin

$$v = v_0 + at. \tag{3.9}$$

Koska nyt siis $\Delta x = v_{av}\, t$ ja $v_{av} = (v_0 + (v_0+\Delta v)) / 2$, saadaan

$$\Delta x = 1/2\,(2v_0 + \Delta v)\, t = 1/2\,(2v_0 + at)\, t = v_0 t + 1/2\, at^2. \tag{3.10}$$

Jos ajanhetkellä $t = 0$ hiukkasen paikka on x_0, niin myös $x = x_0 + \Delta x$ ja

$$x = x_0 + v_0 t + 1/2\, at^2. \tag{3.11}$$

Näistä yhtälöistä voidaan eliminoida aika t, jolloin saadaan

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0). \tag{3.12}$$

Edellä johdetut tasaisesti kiihtyvän suoraviivaisen liikkeen kinematiikan yhtälöt voidaan vaihtoehtoisesti johtaa myös integraalilaskennan keinoin:

Kinematiikan probleemoiden ratkaisemiseksi viidestä suureesta x, v_0, v, a ja t on ainakin kolme tunnettava. Koordinaatisto kannattaa valita siten, että $x_0 = 0$.

Ratkaisemisohjeet

1 Piirrä kuva (ja ratkaise tehtävä graafisesti, jos mahdollista).
2 Merkitse selvästi koordinaatisto ja sen origo.
3 (a) Luettele annetut suureet ja niiden arvot merkkeineen.
(b) Luettele tuntemattomat suureet ja ratkaistavat suureet.
4 Etsi tai johda yhtälö, jossa ratkaistava suure on ainoa tuntematon.
5 Arvioi tulosta: suuruusluokka, yms.; ja ratkaise tehtävä graafisesti, ellet tehnyt sitä jo kohdassa 1.

Esim. 3.6. Auto lähtee levosta ja saa vakiokiihtyvyydellä nopeuden 30 m/s ajassa 10 s ja jatkaa sen jälkeen tällä vakionopeudella. Määritä (a) auton kiihtyvyys, (b) matka, jonka auto etenee kiihdytyksen aikana ja (c) auton kulkema matka, kun nopeus kasvaa 10 m/s – 20 m/s.

Esim. 3.7. Hiukkasen nopeus on $v = 10$ m/s paikassa $x = 5$ m, kun $t = 2$ s. Laske hiukkasen paikka alussa ($t = 0$), kun kiihtyvyys on vakio $a = -4$ m/s^2.

Esim. 3.8. Hurjastelija ajaa nopeudella 15 m/s ja ohittaa poliisiauton. Poliisiauto lähtee paikaltaan sen perään juuri ohitushetkellä ja kiihdyttää tasaisesti 2 m/s^2 kunnes saavuttaa maksiminopeutensa 20 m/s. Milloin ja missä poliisiauto saavuttaa hurjastelijan?

Esim. 3.9. Kaksi autoa lähestyvät toisiaan suoralla tiellä vastakkaisista suunnista, auto A nopeudella 16 m/s ja B 8 m/s. Kun autot ovat 45 m etäisyydellä toisitaan, molemmat ryhtyvät jarruttamaan, auto A 2 m/s^2 ja B 4 m/s^2. Milloin ja missä autot törmäävät?

3.7. Vapaa putoaminen

Kappale, johon vaikuttaa vain jokin gravitaatiovoima, esim. maan vetovoima, on vapaassa putoamisliikkeessä. Silloin siis kaikki muut voimat kuten väliaineenvastus on eliminoitu. Kokeellisesti voidaan todeta, että kaikki kappaleet riippumatta niiden massoista saavat saman vakiokiihtyvyyden (samassa gravitaatiokentässä). Maan pinnalla se on $g \approx 9.81$ m/s^2.

Valitaan putoamisliikkeen tarkastelua varten koordinaatisto, jonka y-akseli osoittaa "ylöspäin", jolloin $\mathbf{g} = a_y\,\hat{\mathbf{j}}$, missä $a_y \approx -9.81$ m/s^2. Siten voidaan kirjoittaa myös, että $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$. Koska vapaa putoaminen on tasaisesti kiihtyvää liikettä, voidaan yhtälöihin (3.9)–(3.12) sijoittaa putoamisliikkeen tarkastelua varten $a = -g$. Tällöin saadaan

$$v = v_0 - gt, \tag{3.13}$$

$$y = y_0 + 1/2\,(v_0 + v)\,t, \tag{3.14}$$

$$y = y_0 + v_0 t - 1/2\,gt^2 \tag{3.15}$$

ja

$$v^2 = v_0^2 - 2g\,(y - y_0). \tag{3.16}$$

Huomaa, että kiihtyvyyden $\mathbf{g}$ suunta on aina sama, eikä riipu siitä onko kappaleen nopeus ylös- vai alaspäin.

<u>Esim. 3.10.</u> Pallo, joka on heitetty ylöspäin, nousee 20 m korkeuteen. Laske (a) pallon alkunopeus, (b) pallon nousuaika, (c) pallon nopeus sen pudotessa takaisin maahan, (d) pallon korkeuden muutos aikavälillä $t = 0.5$ s – 2.5 s, ja (e) ajanhetki, jolloin pallo on 15 m korkeudella. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

Esim. 3.11. Pallo heitetään ylöspäin alkunopeudella 12 m/s 40 m korkealta katolta siten, ettei se putoa takaisin katolle vaan maahan. Laske (a) pallon nopeus sen osuessa maahan, (b) lentoaika, (c) pallon suurin korkeus, (d) ajanhetki, jolloin pallo on palannut katon korkeudelle, ja (e) ajanhetki, jolloin pallo on 15 m katon tason alapuolella. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

Esim. 3.12. Kaksi palloa heitetään toisiaan vastaan, pallo A maasta ylöspäin nopeudella 16 m/s ja pallo B 30 m korkeudelta sekuntia myöhemmin alaspäin nopeudella 9 m/s. (a) Millä korkeudella ja milloin pallot törmäävät? (b) Mitkä ovat pallojen nopeudet törmäyshetkellä?

3.8. Väliaineenvastus ja putoamisen rajanopeus

Kappaleen pudotessa väliaineessa on liike vapaan putoamisen kaltaista vain pienillä nopeuksilla, esim. alkuvaiheessa kappaleen lähtiessä levosta. Kappale saavuttaa vähitellen väliaineen vastuksesta riippuvan rajanopeutensa v_T (engl. terminal speed). Väliaineenvastus riippuu väliaineen ominaisuuksista sekä kappaleen muodosta ja asennosta.

4. TASOLIIKE

Pääkohdat:
1. a. Inertia eli hitaus
   b. Newtonin 1. laki
2. Heittoliike: riippumattomat pysty- ja vaakaliike
3. Ympyräliike ja keskeiskiihtyvyys
4. Inertiaalikoordinaatistot
5. Suhteellinen liike
6. (a) Galilein transformaatio
   (b) Galilein suhteellisuusperiaate

Ympäristöä tarkkailemalla voi helposti tulla sellaiseen johtopäätökseen, että kappaleet pyrkivät pysähtymään lepotilaansa. Tämä oli myös Aristoteleen käsitys, johon uskottiin n. 2000 vuoden ajan kunnes Galieo 1600-luvun alussa ryhtyi asiaa tarkemmin selvittämään.

4.1. Newtonin 1. laki

Galileon ja eräiden muiden työn pohjalta Isaac Newton julkaisi 1. lakinsa vuonna 1687. Se voidaan muotoilla seuraavasti:

Newtonin 1. laki:
Jokainen kappale säilyttää liiketilansa, ellei siihen vaikuta ulkoisia voimia.

Huom! Kappaleen liiketila voi olla lepotila tai tasainen suoraviivainen liike.

Tämä laki tunnetaan myös nimellä jatkavuuslaki ja hitauslaki, koska se sisältää erään kaikkien kappaleiden ominaisuuden: hitaus eli inertia:
Kappaleet vastustavat liiketilansa muutoksia.

(Kappaleen hitautta kuvaava suure on massa ja kappaleen liiketilan muuttamiseksi tarvitaan voimia.)

4.2. Tasoliike

Yleistetään seuraavassa suoraviivaisen eli yksi-dimensioisen liikkeen kinemaattiset yhtälöt taso- eli kaksi-dimensioiselle liikkeelle. Kun korvataan x-koordinaatti radius- eli paikkavektorilla

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.1}$$

saadaan samalla yleistys myös kolmiulotteiseen avaruuteen. Kun hiukkanen liikkuu paikasta $\mathbf{r}_1$ paikkaan $\mathbf{r}_2$, on siirtymä

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\,\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.2}$$

missä $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$
ja $\Delta z = z_2 - z_1$. Siis $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$.

Keskinopeus on nyt

$$\mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

josta raja-arvona saadaan hetkellinen nopeus

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.4}$$

missä $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ ja $v_z = dz/dt$. Vastaavasti hetkellinen kiihtyvyys on

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.5}$$

missä $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ ja $a_z = dv_z/dt$.

Jos kiihtyvyys $\mathbf{a}$ on vakio, on kyseessä tasaisesti kiihtyvä tasoliike ja kinematiikan perusyhtälöt tulevat muotoon

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + 1/2\,(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})\,t, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + 1/2\,\mathbf{a}t^2 \tag{4.8}$$

ja

$$v_s^2 = v_{0s}^2 + 2a_s\,(s - s_0), \tag{4.6*}$$

missä $s = x$, y tai z.

4.3. Heittoliike

Heittoliike on tasoliikettä, jossa liikkeen kahta komponenttia voidaan tarkastella erikseen. Heittoliike tapahtuu tavallisesti maan vetovoimakentässä, joten liike koostuu vapaasta putoamisesta vakiokiihtyvyydellä **g** ja tasaisesta vaakasuuntaisesta liikkeestä vakionopeudella. Valitaan siksi tarkastelun koordinaatiston y-akselin suunta ylöspäin ja x-akseli liikkeen vaakasuuntaan.

Kun valitaan liikkeen alkupisteeksi koordinaatiston origo ja merkitään $a_x = 0$ ja $a_y = -g$, niin yhtälöistä (4.6)–(4.8) saadaan

$$x = v_{0x}\, t \tag{4.9}$$

$$v_y = v_{0y} - gt, \tag{4.10}$$

$$y = y_0 + v_{0y}\, t - 1/2\, gt^2 \tag{4.11}$$

ja

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\,(y - y_0). \tag{4.12}$$

Huomaa, että näihin yhtälöihin ei ole sisällytetty ilmanvastuksen vaikutusta, joten ne pätevät vain putoamisliikkeen rajanopeutta paljon pienemmillä nopeuksilla.

__**Esim. 4.1.**__ Pallo heitetään vaakasuoraan suuntaan 15 m/s 20 m korkeudelta. Laske pallon lentoaika ja kantama.

__**Esim. 4.2.**__ Kappale heitetään maasta alkunopeudella v_0 suuntaan, joka muodostaa kulman θ maanpinnan kanssa. Määrää kappaleen (a) lentoaika, (b) kantama R ja sen suurin arvo sekä (c) ratakäyrän muoto.

__**Esim. 4.3.**__ Pallo heitetään 16 m korkealta katolta nopeudella 21 m/s 30° suunnassa ylöspäin. Laske pallon (a) lentoaika, (b) kantama, (c) suurin korkeus, (d) pallon tulokulma maahan ja (e) pallon nopeus, kun se on 2 m katon tason yläpuolella.

4.4 Tasainen ympyräliike

Tarkastellaan tasaista ympyräliikettä, jossa hiukkanen liikkuu vakiovauhdilla pitkin ympyrän kehää. Hiukkasen nopeus on joka hetki ympyrän tangentin suuntainen ja siten muuttuu koko ajan. Nopeuden itseisarvo, vauhti, on vakio, mutta suunta muuttuu. Hiukkanen on siis kiihtyvässä liikkeessä.

Tarkastellaan aikaväliä Δt, jolla $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ja $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Koska $v_2 = v_1 = v$, nähdään, että $\Delta \mathbf{v}$ ja siten siis kiihtyvyys on ympyrän keskipistettä kohti. Koska lisäksi $r_2 = r_1 = r$, voidaan yhdenmuotoisista kolmiosta kirjoittaa

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v},$$

josta sadaan edelleen, että $|\Delta \mathbf{v}| = (v/r)\,|\Delta \mathbf{r}|$. Koska $|\Delta \mathbf{r}| \approx v\,\Delta t$ (tai $v = |d\mathbf{r}/dt|$), saadaan $|\Delta \mathbf{v}| \approx (v^2/r)\,\Delta t$ ja rajalla $\Delta t \to 0$, $|\Delta \mathbf{v}|/\Delta t \to v^2/r$. Siten kiihtyvyyden itseisarvo on

$$a_r = v^2/r, \tag{4.13}$$

missä alaindeksi r viittaa radiaaliseen kiihtyvyyteen.

Kun nyt tunnetaan kiihtyvyysvektorin suuruus ja suunta, voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}},$$

joka on keskihakuis- eli sentripetaalikiihtyvyys.

Koska ympyrän kehän pituus on $2\pi r$ ja tasaisen ympyräliikkeen nopeus on v, niin yhteen kierrokseen tarvittava aika, ns. jaksonpituus on $T = 2\pi r/v$. Siten $v = 2\pi r/T$ ja

$$a_r = 4\pi^2 r / T^2. \tag{4.14}$$

Esim. 4.5. Lentokoneen vaakasuuntainen keskeiskiihtyvyys on $5g$. Jos koneen nopeus on 2 Machia, mikä on lentokoneen radan säde? 1 Mach = äänennopeus, joka on 340 m/s.

Esim. 4.6. Kuu kiertää maata etäisyydellä 3.84×10^8 m (maan keskipisteestä), yhden kierroksen 27.3 vuorokaudessa. Laske kiertoliikkeen keskeiskiihtyvyys.

Esim. 4.7. Arvioi matalalla lentävän tiedustelusatelliitin kiertoaika maapallon ympäri.

4.5. Inertiaalikoordinaatisto

Kappaleiden paikat ja nopeudet annetaan aina jonkin toisen kappaleen tai sen pisteen suhteen (eli siitä mitattuna). Tavallisimpia ovat esim. havaitsija, maapallo ja aurinko.

Jatkavuuslain perusteella on mahdollista valita koordinaatisto, jossa kaikki vapaat kappaleet liikkuvat tasaisella nopeudella. Tällaista koordinaatistoa kutsutaan intertiaalikoordinaatistoksi. Kääntäen voidaan määritellä, että koordinaatisto, jossa Newtonin 1. laki on voimassa, on intertiaalikoordinaatisto.

Inertiaalikoordinaatisto voidaan siten kiinnittää mihin tahansa vapaaseen kappaleeseen. Oleellista on se, että inertiaalikoordinaatisto **ei ole kiihtyvässä liikkeessä** vapaiden kappaleiden suhteen. Maapalloon kiinnitetty koordinaatisto on tavallisin **approksimaatio** intertiaalikoordinaatistolle.

4.6. Suhteellinen liike

Tarkastellaan kahta koordinaatistoa A ja B sekä pistettä P. Vektorien yhteenlasku antaa

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}, \qquad (4.15)$$

missä $\mathbf{r}_{BA}$ on koordinaatistojen origojen etäisyys. Koska $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, saadaan edelleen

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}. \qquad (4.16)$$

Huomaa, että koordinaatistot ovat samanarvoisessa asemassa keskenään ja

$$\mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA}. \qquad (4.17)$$

Esim. 4.8. Moottoriveneen nopeus vedessä on 10 m/s. Se ylittää 100 m leveän joen, jonka vesi virtaa 5 m/s, siten, että keula osoittaa kohtisuoraan joen yli. (a) Laske veneen nopeus rannan suhteen. (b) Kuinka paljon vene liikkuu sivusuunnassa?

Esim. 4.9. (a) Kuinka edellisen esimerkin venettä täytyy ohjata, jotta se ylittäisi joen kohtisuorasti? (b) Kuinka kauan joen ylitys silloin kestää? (c) Kuinka vene ylittää joen lyhimmässä ajassa?

4.7. Galilei muunnos

Tarkastellaan koordinaatistoa S', joka liikkuu vakionopeudella $\mathbf{u}$ koordinaatiston S suhteen. Tällöin oheisen kuvan mukaan

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t. \quad (4.18)$$

Jos $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$, niin

$$x' = x - ut, \; y' = y, \; z' = z \text{ ja } t' = t. \quad (4.19)$$

Tämä on Galilei-muunnos.

Yhtälöstä (4.18) saadaan derivoimalla ajan suhteen

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (4.20)$$

ja edelleen koska $\mathbf{u}$ on vakio, derivoimalla toiseen kertaan saadaan

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \quad (4.21)$$

Tarkastellaan esimerkkinä putoamisliikettä:

Tästä seuraa ns. Galilein suhteellisuusperiaate:

Mekaniikan lait ovat samat kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

4.8. Yleinen ympyräliike

Liikettä vastaan kohtisuora radiaalikiihtyvyys aiheuttaa siis radan kaareutumista, ympyräliikettä, ja

$$a_r = v^2 / r,$$

missä r on kaarevuussäde. Yleisessä tapauksessa, kun hiukkasen vauhti ei ole vakio, toinen kiihtyvyyden komponentti

$$a_t = dv/dt$$

on nimeltään tangentiaalikiihtyvyys. Kokonaiskiihtyvyys on siten

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \quad (4.22)$$

ja $\mathbf{a}_r \perp \mathbf{a}_t$. Siten $a = \sqrt{(a_r^2 + a_t^2)}$.

Napakoordinaatiston yksikkövektoreiden avulla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{\theta})}{dt} = v\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta} \\ &= -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t. \end{aligned} \quad (4.23)$$

5. DYNAMIIKKA I

<u>**Pääkohdat:**</u>
1. Voima ja massa
2. Newtonin 2. laki
3. Käsitteiden massa ja paino ero
4. Newtonin 3. laki
5. Voimien tasapaino ja statiikka

Dynamiikka tutkii ja selittää sitä, miksi kappaleet liikkuvat tai muuttavat liiketilaansa, kun kinematiikka selittää vain liikettä kuvaavien suureiden välisiä riippuvuuksia. Kappaleet muuttavat liiketilaansa siksi, että niihin kohdistuu voimia. Voimat vaikuttavat kappaleiden välillä. Toisaalta kappaleen liiketila ei muutu, jos siihen vaikuttavien voimien summa häviää. Statiikka tutkii tällaisia tilanteita.

5.1. Voima ja massa

Kappaleeseen vaikuttava voima havaitaan siitä, että kappaleen liiketila muuttuu voiman vaikutuksesta. <u>Klassillisen mekaniikan puitteissa</u> voidaan ajatella, että voimat välittyvät kosketuksen ja kenttien välityksellä. Voiman mittaaminen voi perustua sen kumoamiseen tunnetulla voimalla tai sen aiheuttaman kappaleen liiketilan muutoksen määrittämiseen. Koska voimalla on siis suuruus ja suunta, se on vektorisuure.

Newton määritteli massan aineen määränä. Newtonin 1. lain perusteella voidaan sanoa täsmällisemmin, että kappaleen massa on sen kyky vastustaa liiketilansa muutosta eli se on kappaleen hitauden eli inertian mitta. Massa on skalaarisuure. Massan mittaamiseen voitaisiin käyttää sen liiketilan muutoksen havaitsemista tunnetun voiman vaikutuksen alaisena seuraavalla tavalla.

Tarkastellaan kahta kappaletta A ja B, joihin vaikuttaa yhtäsuuri voima (esim. sama jousi). Kokeellisesti havaitaan, että kappaleiden liiketilojen muutosten suhde $|\Delta \mathbf{v}_A|/|\Delta \mathbf{v}_B|$ on vakio riippumatta tarkastelun aikavälistä Δt. Koska tämä pätee kaikille kappalepareille, on mahdollista määritellä kutakin kappaletta kuvaava vakio tällaisen vertailun perusteella. Tämä vakio on kappaleen massa; m_A ja m_B kappaleille A ja B.

On käytännöllistä määritellä kappaleen massa siten, että suurempaa nopeuden muutosta vastaa pienempi massa ja päin vastoin, ja koska $\Delta v = a\,\Delta t$ hyvin pienillä Δt, voidaan kirjoittaa

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{|\Delta \mathbf{v}_B|}{|\Delta \mathbf{v}_A|} = \frac{a_B}{a_A}\,. \tag{5.1}$$

Vertaamalla kappaleita tällä tavoin tunnettuun 1 kg massaiseen kappaleeseen voitaisiin kappaleiden massat määrittää.

5.2. Newtonin 2. laki

Kokeellisesti siis $a \propto 1/m$. Kokeellisesti voidaan myös todeta, että $a \propto F$, missä F on mihin tahansa kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima. Siten $a \propto F/m$ eli $a = k\,F/m$, missä k on yksikköjärjestelmästä määräytyvä vakio. SI-järjestelmässä $k = 1$, joten $F = ma$ tai yleisemmin vektorimerkinnöin

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a},} \tag{5.2}$$

missä $\sum \mathbf{F}$ merkintää käytetään korostamaan sitä, että kyseessä on kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien summa.

Tämä on Newtonin 2. laki eli dynamiikan peruslaki ja se on voimassa kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

Newtonin 2. laki voidaan sanoa myös muodossa:

Kappaleeseen vaikuttavien voimien summa $\sum \mathbf{F}$ antaa m-massaiselle kappaleelle kiihtyvyyden $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, joka on samaan suuntaan kuin $\sum \mathbf{F}$.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on nimeltään newton (N) ja 1 N = 1 kg m / s^2.

Dynamiikan peruslakia on yleensä mukavinta käyttää komponentteihinsa jaettuna

$$\sum F_x = m\, a_x, \quad \sum F_y = m\, a_y \quad \text{ja} \quad \sum F_z = m\, a_z. \tag{5.3}$$

<u>Esim 5.3.</u> Elektronin massa on $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. Se tulee alkunopeudella $\mathbf{v}_0 = 10^6\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s alueelle, jossa siihen vaikuttaa voima $\mathbf{F} = 8.0 \times 10^{-17}\,\hat{\mathbf{j}}$ N ajan 10^{-8} s. Mikä on elektronin nopeus tämän jälkeen?

5.3. Gravitaatiolaki ja kappaleen paino

Voidakseen selittää Johannes Keplerin (1571–1630) havaisemat planeettojen liikkeet aurinkokunnassa Newton (1642–1727) postuloi painovoimalain. Tycho Brahen (1546–1601) ja Keplerin havaintoihin perustuen hän päätteli, että kappaleiden välinen vetovoima on kääntäen verrannollinen niiden etäisyyden neliöön eli $F \propto 1/r^2$. Olettamalla, että vetovoima on verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M, voidaan kirjoittaa Newtonin yleinen painovoima- eli gravitaatiolaki

$$F = G\,\frac{m\,M}{r^2} \tag{5.4}$$

missä $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 on verrannollisuuskerroin, ns. gravitaatiovakio. Myöhemmin osoitetaan, että pallosymmetristen kappaleiden, esim. planeettojen, etäisyyksiä tulee mitata niiden keskipisteistä gravitaatiolain soveltamista varten.

Määritellään paino W siten, että

kappaleen paino on siihen kohdistuva gravitaatiovoima.

Kappaleen paino maan pinnalla on siis siihen kohdistuva maan vetovoima, joka saadaan gravitaatiolaista (5.4). Kun kappaleen massa on m, maapallon massa M_E ja maan pinnalla kappaleen etäisyys maan keskipisteestä sama kuin maapallon säde R_E, saadaan

$$W = G\,\frac{m\,M_E}{R_E^2} \tag{5.5}$$

Tavallisesti tämä kirjoitetaan muotoon

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g} \tag{5.6}$$

josta voidaan ratkaista

$$g = G\,\frac{M_E}{R_E^2}$$

mikä on siis gravitaatiovoima maan pinnalla yksikkömassaa (kg) kohti eli painovoimakentän voimakkuus.

Koska painovoimalla $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ on sama muoto kuin Newtonin 2. lailla $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sanotaan painovoimakentän voimakkuutta $\mathbf{g}$ myös maan vetovoiman kiihtyvyydeksi. On kuitenkin syytä huomata, ettei kappaleen paino riipu sen kiihtyvyydestä eikä kappaleen kiihtyvyys vain sen painosta, koska kappaleeseen voi vaikuttaa muitakin voimia. Kappaleen paino on sen liiketilasta riippumaton.

Newtonin 2. laki $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ tarkastelee ns. hitaan massan eli liiketilansa muutoksia vastustavan massan ominaisuuksia, kun painovoima taas $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ ns. painavan massan eli gravitaatiovoiman kokevan massan ominaisuuksia. Koska nämä ovat aivan eri ilmiöitä, ovat niissä esiintyvät massatkin periaatteessa eri suureita (klassillisessa mekaniikassa). Kokeellisesti nämä kaksi massaa eivät kuitenkaan eroa toisistaan ja yleisessä suhteellisuusteoriassa ne ovatkin saman suureen ilmenemismuotoja.

Huomaa, että yleisessä kielenkäytössä painoa käytettän usein massan merkityksessä. Mitkä ovat näiden suureiden erot?

5.4. Newtonin 3. laki

Voimat esiintyvät aina kappaleiden välillä. Siten

jos kappale A vaikuttaa kappaleeseen B voimalla $\mathbf{F}_{BA}$, niin kappale B vaikuttaa kappaleeseen A voimalla $\mathbf{F}_{AB}$ ja

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}. \tag{5.7}$$

Tämä on Newtonin 3. laki eli voiman ja vastavoiman laki.

On syytä huomata, että voima ja sen vastavoima vaikuttavat eri kappaleisiin eivätkä sen vuoksi kumoa toisiaan!

Newtonin 3. laki on voimassa vain inertiaalikoordinaatistoissa.

Tarkastellaan voimaa ja sen vastavoimaa seuraavissa tapauksissa:

5.5. Newtonin lakien sovellutuksia

Dynamiikan tehtävien ratkaisuohjeet:

1. Piirrä hyvä kuva ja määrittele systeemi, jota tarkastelet.
2. Merkitse kaikki systeemiin vaikuttavat voimat.
3. Valitse tarkoituksenmukainen inertiaalikoordinaatisto.
4. Jaa voimat komponentteihinsa valitussa koordinaatistossa.
5. Kirjoita liike yhtälöt muodossa $\sum F_x = m\,a_x$, $\sum F_y = m\,a_y$ ja $\sum F_z = m\,a_z$, sekä ratkaise tuntemattomat suureet.
6. Arvioi tuloksia:
   (a) tarkista merkit,
   (b) tarkista yksiköt ja
   (c) arvioi suuruusluokkia.

Esim. 5.8. Ratkaise "hevonen ja kärry" paradoksi.

Esim. (5.9.) Vapaasti riippuva massa $m_1 = 3.0$ kg on kiinnitetty kevyellä narulla kitkattoman rattaan yli massaan $m_2 = 2.0$ kg, joka lepää kitkattomasti kaltevalla tasolla ($\theta = 30^\circ$ vaakasuuntaan nähden). Määrää massojen kiihtyvyys ja narun jännitys.

5.6. Näennäinen paino

Kappaleen ollessa paikallaan (tai tasaisessa liikkeessä) sen paino voidaan havaita (tai mitata) määrittämällä se tukivoima, joka kumoaa kappaleeseen kohdistuvan painovoiman.

Jos kappale on kiihtyvässä liikkeessä, voi tarvittava tukivoima muuttua sen johdosta. Tukivoiman avulla määriteltyä painoa sanotaan näennäiseksi painoksi. Kappaleen todellinen paino ei kuitenkaan riipu liiketilasta.

Esim. punnitseminen liikkeelle lähtevässä tai pysähtyvässä hississä:

6. DYNAMIIKKA II

Pääkohdat:

1. (a) Lepokitka ja liikekitka
   (b) Kitkakerroin
2. Ympyräliikkeen dynamiikka
3. Keplerin 3. laki

6.1. Kitka

Kitka on kappaleiden välisiin kosketuksiin liittyvä makroskooppinen voima. Tavallisin esimerkki on jollakin pinnalla lepäävä kappale, jonka liikkuessa tai pyrkiessä liikkumaan syntyy liikettä vastustava kosketuksesta aiheutuva voima, kitkavoima.

Käytännössä kitka voi olla hyödyllinen, jolloin sitä pyritään suurentamaan, tai se voi olla haitallinen, jolloin sitä pyritään taas pienentämään.

Jo Leonardo da Vinci vuonna 1508 totesi, että

(i) kitka on verrannollinen kappaleen painoon, tai täsmällisemmin, pinnan tukivoiman kohtisuoraan komponenttiin; ja

(ii) kitka on riippumaton kosketuksen pinta-alasta.

Lisäksi myöhemmin havaittiin (Amonton, 1699), että

(iii) kitka on riippumaton kappaleen nopeudesta pinnalla.

Kitkan voidaan ajatella aiheutuvan kosketuspintojen epätasaisuuksista, pintojen välisistä attraktiivisista voimista tai sekoittumisilmiöistä.

Lepokitka vastustaa pinnalla lepäävän kappaleen liikkeelle lähtöä. Kappaleen liukuessa pinnalla vaikuttaa taas liukukitka, liukumista jarruttamaan pyrkivä voima.

Koska liukukitka f_k on verrannollinen kappaleeseen kohdistuvan tukivoiman kohtisuoraan komponenttiin N, voidaan kirjoittaa

$$f_k = \mu_k N, \tag{6.1}$$

missä verrannollisuuskerroin μ_k on nimeltään liukukitkakerroin. Kitkakerroin on laaduton suure, koska sekä f_k että N ovat voimia.

Lepokitkan f_s suuruus riippuu muista kappaleeseen vaikuttavista voimista, mutta lepokitkan suurin arvo $f_{s(max)}$ (juuri ennen kappaleen liikkeelle lähtöä) noudattaa riippuvuutta

$$f_{s(max)} = \mu_s N, \quad [\ f_s \le \mu_s N\ ]. \tag{6.2}$$

Tässä μ_s on lepokitkakerroin. Tavallisesti $\mu_s > \mu_k$.

Esim. 6.3. Kappale 1 ($m_1 = 2.0$ kg) on asetettu toisen kappaleen 2 ($m_2 = 4.0$ kg) päälle. Kappale 2 lepää kitkattomalla vaakasuoralla pinnalla ja siihen kohdistuu voima $F_0 = 30$ N. Määritä pienin lepokitkakerroin, joka pitää kappaleet päällekkäin.

6.2. Ympyräliikkeen dynamiikkaa

Kuten kappaleessa 4.4 todettiin, tasaisessa ympyrä liikkeessä kappaleen kiihtyvyys on

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}},$$

missä v ja r ovat liikkeen ratanopeus (vauhti) ja ympyrän säde. Dynamiikan peruslain $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ mukaan kappaleeseen täytyy silloin vaikuttaa jokin voima, jonka suuruus on

$$F = mv^2 / r. \tag{6.3}$$

Tämä on keskihakuis- eli sentripetaalivoima. Huomaa, että tässä on sanottu ainoastaan voiman suuruus, mutta ei mitään voiman aiheuttajasta (gravitaatio, köysi, kitka, ...).

Pyörimisliikkeessä olevaan kappaleeseen kiinnitetty koordinaatisto ei ole inertiaalikoordinaatisto ja siinä esiintyy keskipakois- eli sentrifugaalivoima, joka on näennäisvoima.

<u>Esim. 6.4.</u> Pieni esine on asetettu vaakasuoran pyöreän levyn ($r = 15$ cm) reunalle. Määrää pienin lepokitkakerroin siten, ettei esine putoa, kun levy pyörii 30 kierr./min pystysuoran akselinsa ympäri.

6.3. Keplerin 3. laki

Aurinkoa kiertävien planeettojen ja maata kiertävien satelliittien (ja kuun) radat ovat likimain ympyröitä. Nämä ympyräliikkeet (keskeisliikkeet) aiheuttava keskihakuisvoima on tässä gravitaatiovoima. Kun toinen massoista, aurinko tai maa edellä, on paljon suurempi kuin toinen, on sen liike hyvin vähäistä ja pienempi massainen kappale kiertää sitä.

Liikettä voidaan tarkastella massapisteen m liikkenä massapisteen M ympäri, ja koska nyt $F = -G\,Mm/r^2$ ja $a = -v^2/r$, liikeyhtälö $F = ma$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$-G\,Mm/r^2 = -mv^2/r. \tag{6.4}$$

Tästä voidaan ratkaista kiertoliikkeen ratanopeus

$$v = \sqrt{(GM/r)} \tag{6.5}$$

ja kiertoliikkeen jaksonpituus (kiertoaika) $T = 2\pi r/v$,

$$T = 2\pi/\sqrt{(GM)} \times \sqrt{r^3}.$$

Siten

$$T^2 = \kappa\, r^3, \tag{6.6}$$

missä

$$\kappa = 4\pi^2 / GM.$$

Tämä on Keplerin 3. laki: Planeettojen kiertoaikojen neliöt ovat suoraan verrannollisia niiden Auringosta mitattujen keskietäisyyksien kuutioihin. Kepler päätteli tämän tekemiinsä havaintoihin perustuen vuonna 1619.

7. TYÖ JA ENERGIA

Pääkohdat:
1. (a) Voiman tekemä työ
   (b) Graafinen esitys Fx-koordinaatistossa
2. Kineettinen energia
3. Työn ja mekaanisen energian ekvivalenssi
4. Teho

Kaikki mekaniikan probleemat voidaan periaatteessa ratkaista Newtonin lakien avulla, liikeyhtälöistä. Energia-käsitteen käyttöönottaminen kuitenkin yksinkertaistaa monia tarkasteluita ja energian säilymislaki erityisesti on hyvin käyttökelpoinen "työkalu". Seuraavassa määritellään ensin energia työ-käsitteen avulla.

7.1. Voiman tekemä työ

Vakiovoiman $\mathbf{F}$ tekemä työ W liikkuvaan kappaleeseen on

$$W = F s \cos\theta, \qquad (7.1a)$$

missä s on kappaleen siirtymä ja θ on voima- ja siirtymävektoreiden $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{s}$ välinen kulma. Siten voidaan kirjoittaa myös

$$W = \mathbf{F}\cdot \mathbf{s} \qquad (7.1b)$$

tai

$$W = F_x \,\Delta x + F_y \,\Delta y + F_z \,\Delta z, \qquad (7.1c)$$

kun $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{s} = \Delta x\, \hat{\mathbf{i}} + \Delta y\, \hat{\mathbf{j}} + \Delta z\, \hat{\mathbf{k}}$.

Työn SI-yksikkö on nimeltään joule (J) ja 1 J = 1 Nm.

Voiman kappaleeseen tekemä työ ei siis riipu suoranaisesti kappaleen liiketilasta. Se ei myöskään riipu kappaleen asennosta eikä kappaleeseen vaikuttavista muista mahdollisista voimista, vaan se riippuu ainoastaan vektoreista $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{s}$. Huomaa kuitenkin, että tietyn ajan vaikuttavan voiman tekemä työ voi olla eri suuri laskettuna kahdessa eri inertiaalikoordinaatistossa. Selitä miksi?

Jos $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$, niin $\mathbf{F} \perp \mathbf{s}$ kaikilla pienillä siirtymillä $\mathbf{s}$ ja $W = \mathbf{F}\cdot \mathbf{s} = 0$. Siksi esim. keskihakuisvoima ei tee työtä, vaikka antaa kappaleelle kiihtyvyyden.

Jos kappaleeseen vaikuttaa useita voimia peräkkäin, niin kappaleeseen tehty työ on

$$W_{NET} = \mathbf{F}_1\cdot \mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2\cdot \mathbf{s}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N\cdot \mathbf{s}_N,$$

tai samanaikaisesti, niin etenevän liikkeen tapauksessa

$$W_{NET} = \mathbf{F}_{NET}\cdot \mathbf{s}, \qquad (7.2)$$

missä

$$\mathbf{F}_{NET} = \textstyle\sum_i \mathbf{F}_i.$$

Työn määritelmästä (7.1) nähdään, että jos vektoreiden $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{s}$ välinen kulma on suurempi kuin 90°, niin $W < 0$. Jos työ on negatiivinen, voidaan sanoa, että kyseessä on kappaleen tekemä työ. Koska kappaleiden välisille voimille pätee $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$, seuraa myös, että (kappaleeseen tehty työ) = –(kappaleen tekemä työ)

$$W_{AB} = -W_{BA}. \qquad (7.3)$$

Liikettä vastustavan kitkavoiman tekemä työ on tyypillinen esimerkki negatiivisesta eli kappaleen tekemästä työstä. Jos $\mathbf{F} = \mathbf{f}_k$ ja $\theta = 180^\circ$, niin

$$W = \mathbf{F}\cdot \mathbf{s} = -f_k\, s. \qquad (7.4)$$

Huomaa kuitenkin, ettei kitkan tekemä työ ole välttämättä negatiivinen.

Maan vetovoiman kappaleeseen tekemä työ on

$$W_h = -mgh, \qquad (7.5)$$

missä $h = y_f - y_i = \Delta y$ on kappaleen "korkeuden" muutos maan pinnalla. Tämä seuraa siitä, että kappaleen paino on $\mathbf{F} = -mg\,\hat{\mathbf{j}}$ ja $\mathbf{s} = \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\,\hat{\mathbf{k}}$. Osoita:

Maan vetovoiman tekemä työ siis riippuu vain kappaleen korkeuden muutoksesta, ei kappaleen kulkemasta tiestä. Erityisesti, jos kappale palaa lähtöpaikkaansa, on tehty työ aina nolla.

7.2. Muuttuvan voiman tekemä työ

Tarkastellaan tilannetta suoraviivaisessa (yksiulotteisessa, pitkin x-akselia tapahtuvassa) liikkeessä, jolloin $W = F_x\,\Delta x$. Tehty työ voidaan laskea merkkeineen Fx-koordinaatistoon piirretystä kuvaajasta pinta-alana eli graafisena integraalina samoin kuin aikaisemmin kappaleessa 3.5 laskettiin nopeutta ja matkaa kiihtyvyyden ja nopeuden integraaleina.

Jouseen kytkettyyn kappaleeseen jousen kohdistama (harmoninen) voima on

$$F = -k\,x, \qquad (7.6)$$

missä x on kappaleen poikkeama tasapainoasemasta ja k on jousta kuvaava ns. jousivakio. Voima pyrkii palauttamaan kappaleen tasapainoasemaansa.

Fx-koordinaatistoon piirretystä kuvaajasta nähdään, että jousen kappaleeseen tekemä työ on

$$W = -1/2\,k\,(x_f^2 - x_i^2), \qquad (7.7)$$

kun kappale siirtyy paikasta x_i paikkaan x_f.

Kun kappaleeseen vaikuttava voima tunnetaan paikan funktiona $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$, voidaan voiman tekemä työ laskea integraalina

$$W_{i\to f} = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \qquad (7.8)$$

josta nähdään, että

$$W_{f\to i} = -W_{i\to f} \qquad (7.9)$$

Siten jousen kappaleeseen tekemä työ (7.7) saadaan helposti voiman (7.6) lausekkeesta:

7.3. Kineettinen energia

Tarkastellaan kappaleeseen työtä tekevän voiman vaikutusta kappaleen liiketilaan (ensin suoraviivaisessa liikkeessä). Kun vakiovoima F_x vaikuttaa kappaleeseen, työn määritelmän ja dynamiikan peruslain mukaan $W = F_x \Delta x = ma_x \Delta x$. Koska F_x on vakio, on myös kappaleen kiihtyvyys vakio $a_x = (v_f - v_i) / \Delta t$ ja $\Delta x = 1/2\,(v_f + v_i)\,\Delta t$ aikavälillä Δt, kun nopeus muuttuu $v_i \rightarrow v_f$. Nyt $ma_x \Delta x = 1/2\ m\,(v_f - v_i)\,(v_f + v_i) = 1/2\ m\,(v_f^2 - v_i^2)$. Siten voiman tekemä työ voidaan kirjottaa alku- ja loppunopeuksien v_i ja v_f avulla muotoon

$$W = 1/2\ mv_f^2 - 1/2\ mv_i^2 = K_f - K_i, \tag{7.10}$$

missä

$$K = 1/2\ mv^2 \tag{7.11}$$

on kappaleen vauhdista v riippuva skalaarisuure, kineettinen eli liike-energia. Siis voiman tekemä työ muuttuu kappaleen etenevän liikkeen kineettiseksi energiaksi

$$W = \Delta K, \tag{7.12}$$

ja vastaavasti liiketilaansa muuttamalla kappale voi tehdä työtä.

Yleisemminkin voidaan sanoa, että energia on kykyä tehdä työtä. Tämä on ns. työn ja mekaanisen energian ekvivalenssi.

Yhtälö (7.12) itse asiassa sisältää dynamiikan peruslain: kappaleen liiketilan muutokseen liittyvän lain, tässä vain voiman tekemän työ-käsitteen avulla ilmaistuna.

Työn ja mekaanisen energian ekvivalenssi on voimassa yleisesti, ei ainoastaan vakiovoimille, vaan myös muuttuville voimille. Voima voi muuttua paikan funktiona, jolloin

Edellinen tarkastelu voidaan laajentaa 3-ulotteiseen tapaukseen, jossa

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \tag{7.17}$$

ja

$$\begin{aligned} W_{A\rightarrow B} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B F \cos\theta\, ds \end{aligned} \tag{7.18–19}$$

$$= \int_A^B F_x\, dx + \int_A^B F_y\, dy + \int_A^B F_z\, dz,$$

kun $\mathbf{F} = F_x\, \hat{\mathbf{i}} + F_x\, \hat{\mathbf{j}} + F_x\, \hat{\mathbf{k}}$ ja
$d\mathbf{s} = dx\, \hat{\mathbf{i}} + dy\, \hat{\mathbf{j}} + dz\, \hat{\mathbf{k}}$.

Esim. 7.9. Matemaattinen heiluri (massa m ja pituus L) poikkeutetaan tasapainoasemastaan kulmaan θ_0 hyvin hitaasti vaakasuoraan suuntaan vaikuttavalla voimalla. Määritä voiman tekemä työ.

7.4. Teho

Työn määrän tai suuruuden lisäksi on usein merkitystä sillä kuinka kauan työn tekeminen kestää, kuinka "tehokasta" se on. Teho on tehty työ aikayksikössä

$$P_{av} = \Delta W / \Delta t \tag{7.13}$$

tai

$$P = dW/dt. \tag{7.14}$$

Tehon yleisempi määritelmä on energian muutosnopeus toiseksi energiamuodoksi

$$P = dE/dt. \tag{7.16}$$

Tehon SI-yksikkö on watti (W) ja $1\ W = 1\ J/s$. Eräs paljon käytössä ollut tehon yksikkö on hevosvoima (hp = horse power) ja $1\ hp = 746\ W = 0.746\ kW$.

Jos voima $\mathbf{F}$ vaikuttaa kappaleeseen, joka liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$, voidaan kirjoittaa $P = dW/dt = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}/dt$, ja koska $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}$,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{7.15}$$

Esim. (7.8) Raketti, jonka massa on m lähtee maanpinnalta suoraan ylöspäin. Mikä on rakettimoottorin teho silloin, kun raketin kiihtyvyys on a ja nopeus v?

8. ENERGIAN SÄILYMINEN

Pääkohdat:

1. Konservatiivinen voima
2. (a) Potentiaalienergia
   (b) Konservatiivinen voima ja potentiaalienergia
3. (a) Potentiaalienergia maanpinnalla
   (b) Jousen potentiaalienergia
4. (a) Mekaanisen energian säilymislaki
   (b) Epäkonservatiiviset voimat
5. Gravitaatiovoiman (tai -kentän) potentiaalienergia

Edellä määriteltiin kineettinen energia, joka liittyy kappaleen liikkeeseen, ja seuraavassa määritellään potentiaalienergia, joka liittyy kappaleen paikkaan. Näiden avulla voidaan sitten muotoilla mekaanisen energian säilymislaki.

Säilymislait ovat keskeisiä luonnon ilmiöiden selittämisessä ja ennustamisessa, ja yleinen energian säilymislaki on niistä ehkä tärkein.

8.1. Potentiaalienergia

Kappaleiden välisiin vuorovaikutuksiin liittyvät voimat tekevät työtä, kun kappaleiden paikat muuttuvat toistensa suhteen. Siten kappaleen paikkaan, esim. sen etäisyyteen maapallon keskipisteestä, voidaan liittää potentiaalienergia, joka kuvaa näiden voimien kykyä tehdä työtä.

Potentiaalienergia liittyy siten kahden kappaleen muodostamaan systeemiin, mutta usein puhutaan toisen kappaleen potentiaalienergiasta toisen muodostamassa kentässä.

Määritellään aluksi, että ulkoisen voiman tekemä työ W_{EXT} kappaleeseen, jonka kineettinen energia ei muutu, on kappaleen potentiaalienergian U muutos

$$W_{EXT} = +\Delta U = U_f - U_i. \tag{8.1}$$

Myöhemmin tullaan toteamaan, että potentiaalienergiaan voidaan lisätä tai siitä voidaan vähentää vakio tarkasteltavien ilmiöiden muuttumatta. Tämä tarkoittaa sitä, että potentiaalienergian nollakohta voidaan valita vapaasti. Siten voidaan myös määritellä myös, että

kahden kappaleen välinen potentiaalienergia on se ulkoinen työ, joka tarvitaan tuomaan kappaleet vakionopeudella sijoilleen sellaisesta tilanteesta, jossa potentiaalienergia on nolla.

Tässä vakionopeus tarkoittaa sitä, että kappaleiden kineettinen energia ei muutu.

8.2. Konservatiiviset voimat

Painovoiman ja jousivoiman tekemä työ riippuu vain kappaleen alku- ja loppupaikoista, jos kappaleen kineettinen energia ei ole muuttunut. Työ ei riipu siitä tiestä, jota pitkin kappale on liikkunut, ja erityisesti, jos kappale palaa lähtöpaikkaansa on työ nolla. Tällainen voima on konservatiivinen voima.

Kitkavoiman tekemä työ taas tavallisesti riippuu kappaleen kulkemasta tiestä. Tällainen voima on epäkonservatiivinen.

Määritellään, että

konservatiivinen voima on sellainen voima, jonka tekemä työ ei riipu kappaleen kulkemasta tiestä

$$W^{(1)}_{A\to B} = W^{(2)}_{A\to B}, \tag{8.2}$$

tai myös, että

konservatiivisen voiman tekemä työ suljetulla tiellä häviää

$$W^{(1)}_{A\to B} + W^{(2)}_{B\to A} = 0. \tag{8.3}$$

Näistä ehdoista seuraa, että konservatiivinen voima riippuu vain paikasta, mutta ei ajasta tai kappaleen nopeudesta.

8.3. Konservatiivisen voiman potentiaalienergia

Edellä mainitusta ehdosta seuraa, että potentiaalienergia voidaan määritellä yksikäsitteisesti vain, jos siihen liittyvät voimat ovat konservatiivisia. Siten potentiaalienergia voidaan määritellä konservatiivisen voiman tekemänä työnä

$$W_c = -\Delta U = -(U_f - U_i). \tag{8.4}$$

Vertaa tätä yhtälöä yhtälöön (8.1). Mitä oleellisia eroja huomaat!

Potentiaalienergian merkki on valittu siten, että konservatiiviset voimat pyrkivät minimoimaan potentiaalienergian.

Kolmiulotteisessa tilassa

$$dU = -dW_c = -\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \tag{8.5}$$

ja edelleen

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}. \tag{8.6}$$

Kun ulkoinen voima tekee työtä kappaleeseen, johon vaikuttaa konservatiivinen voima, esim. painovoima, muuttuu tehty työ kappaleen potentiaalienergiaksi, joka voi taas muuttua samaksi määräksi kappaleen tekemää työtä. Tästä tule nimitys konservatiivinen (engl. conservative = säilyttävä).

8.4. Potentiaalienergiafunktio

Potentiaalienergia on siis kappaleen paikan funktio (tai koko systeemin kappaleiden paikkojen funktio). Kappaleen potentiaalienergia painovoimakentässä on

$$U_g = mgy, \qquad (8.7)$$

kun y-akseli on suunnattu suoraan ylöspäin, ja kappaleen potentiaalienergia jousivoiman vaikuttaessa on

$$U_{sp} = 1/2\ kx^2. \qquad (8.8)$$

8.5. Mekaanisen energian säilymislaki

Tarkastellaan kappaletta, johon vaikuttaa vain konservatiivisia voimia. Kun yhdistetään työn ja kineettisen energian ekvivalenssi (7.12) $W = \Delta K$ ja potentiaalienergian määritelmä (8.4) $W_c = -\Delta U$, saadaan $\Delta K = -\Delta U$, koska $W = W_c$ vain konservatiivisten voimien vaikuttaessa. Siten vain konservatiivisten voimien vaikuttaessa

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad (8.9a)$$

eli

$$K_i + U_i = K_f + U_f. \qquad (8.9b)$$

Tai voidaan sanoa, että mekaaninen energia

$$E = K + U \qquad (8.10)$$

säilyy,

$$\Delta E = 0 \quad \text{eli} \quad E_i = E_f. \qquad (8.11)$$

Tämä on mekaanisen energian säilymislaki eli ns. "energiaperiaate".

Kappaleen putoamiseen painovoimakentässä sovellettuna säilyvä mekaaninen energia on

$$E = 1/2\ mv^2 + mgy, \qquad (8.12)$$

joten

$$E = 1/2\ mv^2_{max} = mgh, \qquad (8.13)$$

missä h on kappaleen suurin korkeus.

Jouseen kiinnitetyn kappaleen säilyvä mekaaninen kokonaisenergia taas on

$$E = 1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2, \qquad (8.14a)$$

joten

$$E = 1/2\ mv^2_{max} = 1/2\ kA^2, \qquad (8.14b)$$

missä A on kappaleen suurin poikkeama tasapaioasemastaan tai liikkeen amplitudi.

Energiaperiaatteen soveltamisohjeet:

1. Määrittele kaikki kappaleet, joiden kineettinen tai potentiaalienergia voi muuttua, ja kirjoita niiden kaikkien energioiden lausekkeet. Tällöin

$$E = \textstyle\sum_i K_i + \sum_i U_i. \qquad (8.15)$$

2. Valitse potentiaalienergioiden U_i nollataso tai tarkastele vain muutoksia ΔK_i ja ΔU_i ja ratkaise tuntemattomat suureet.

Huomaa, että tällä menetelmällä ei voida tarkastella kappaleiden liikkeiden aikariippuvuksia.

Esim. (8.4.) Ratkaise "Problem 5.4." Kaksi massaa $m_1 = 3.0$ kg ja $m_2 = 5.0$ kg on ripustettu kevyellä narulla kitkattoman rattaan yli siten, että m_1 on maan pinnalla ja m_2 on 4.0 m korkeudella maan pinnasta. Minkä korkeuden m_1 saavuttaa maasta mitattuna, kun systeemi vapautetaan?

Esim. (8.7.) Ratkaise Esim. 7.9. energiaperiaatteella.

8.6. Mekaaninen energia ja epäkonservatiiviset voimat

Mikäli konservatiivisessa voimakentässä olevaan kappaleeseen vaikuttaa myös epäkonservatiivisia voimia, voidaan energiaperiaatetta soveltaa, jos epäkonservatiivisten voimia vastaan tehty työ W_{nc} tunnetaan tai voidaan laskea. Tällöin

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{nc}. \qquad (8.16)$$

8.7. Konservatiivisen voiman ja potentiaalienergiafunktion välinen yhteys

Kappaleessa 8.3. todettiin, että konservatiivisen voiman $\mathbf{F}_c$ tekemä työ on potentiaalienergiafunktion muutos

$$dU = -\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s}, \qquad (8.5)$$

joka voidaan kirjoittaa suoraviivaisen liikkeen (x-akselilla) tapauksessa $dU = -F_x\,dx$. Siten

$$F_x = -\,dU/dx. \qquad (8.17–18)$$

Siis, konservatiivinen voima voidaan laskea skalaarisesta potentiaalienergiafunktiosta.

Esim. Laske painovoima ja jousivoima niiden potentiaalienergioiden lausekkeista.

Esim. Yleistä yhtälö (8.17) 3-ulotteiseen tapaukseen.

8.8. Potentiaalienergiakäyrä

Konservatiivinen voima saadaan siis poteentiaalienergiafunktion negatiivisena derivaattana ja potentiaalienergia taas konservatiivisenvoiman negatiivisena integraalina. Tätä voidaan mukavasti havainnollistaa graafisella esityksellä.

Tarkastellaan lisäksi esimerkkinä gravitaatiopotentiaalia ja kahden atomin välistä voimaa ja sen potentiaalia. Potentiaalikäyrän avulla voidaan mukavasti määritellä käsitteet potentiaalikuoppa, sidottu tila, energiataso ja sidosenergia.

8.9. Gravitaatiopotentiaali

Painovoiman potentiaalin lauseke $U_g = mgh$ on voimassa vain aivan maan pinnan läheisyydessä. Yleisempi lauseke saadaan yhtälöstä

$$U = U_0 - \int_0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{8.6}$$

missä

$$\mathbf{F} = -GmM/r^2\, \hat{\mathbf{r}}. \tag{5.4}$$

$$U(r) = -GmM/r \tag{8.19}$$

Esim. 8.10. Osita, että $U_g = mgh$ saadaan lausekkeesta (8.19) tiettynä rajatapauksena.

Kahden kappaleen (m ja M) muodostaman systeemin kokonaisenergia on

$$E = 1/2\, mv^2 - GmM/r. \tag{8.20}$$

Jos $m << M$ ja m kiertää ympyrärataa, niin (6.5) $v = -\sqrt{(GM/r)}$, jolloin

$$K = 1/2\, mv^2 = 1/2\, GmM/r.$$

Siten

$$E = K + U = -1/2\, GmM/r. \tag{8.21}$$

Kappaleen pakonopeudeksi maan pinnalta sanotaan sitä vauhtia, jonka kappale tarvitsee päästäkseen maan pinnalta avaruuteen ja kokonaan pois maan vetovoiman vaikutuksesta. Energia periaatteen mukaan voidaan silloin kirjoittaa

$$1/2\, mv_1^2 - GmM_E/R_E = 1/2\, mv_2^2 + 0,$$

missä vauhdin v_2 pienin arvo on 0, jota vastaa pakonopeus $v_1 = v_{esc}$. Siten

$$v_{esc} = \sqrt{(2GM_E/R_E)}. \tag{8.22}$$