OSA III
LASERVAHVISTUS

7. LASERTOIMINNAN EHDOT

Pääkohdat:
- säteilyn vahvistuminen stimuloidun emission avulla
- populaatioinversio
- peilien käyttö
- toiminnan kynnysehdot

7.1. ABSORPTIO JA VAHVISTUS

Tarkastellaan säteilyä $I = I(\nu)$ $\Delta\nu$, joka voi väliaineen läpäisessään sekä absorboitua että stimuloida emissiota taajuudellaan ν_0. Väliaineen energiatasot u ja ℓ ovat siis sellaiset, että $\Delta E_{u\ell} = E_u - E_\ell = h\nu_{u\ell} \approx \nu_0$.

TAPAUS: HOMOGEENINEN VIIVANMUOTO

Oletetaan aluksi, että väliaineessa tapahtuvien transitioiden viivanmuoto on homogeeninen (Lorentz)

$$A_{u\ell}(\nu) = \frac{\gamma^T_{u\ell}/4\pi^2}{(\nu-\nu_0)^2 + \left(\gamma^T_{u\ell}/4\pi\right)^2} A_{u\ell}\,, \qquad (4.64)$$

sekä absorptiolle, että molemmille emissioille.

Tiettyyn suuntaan etenevä säteily stimuloi absorptiota ja emissiota. Spontaani emissio juuri tiettyyn suuntaan on merkityksettömän pientä ja voidaan jättää ottamatta huomioon. Siten (7.4)

$$dI = [N_u B_{u\ell}(\nu) - N_\ell B_{\ell u}(\nu)]\, I\, h\nu/c\, dz,$$

jonka ratkaisu on

$$I = I_0 \exp[g^H(\nu)\, z], \qquad (7.8)$$

missä vahvistuskerroin

$$g^H(\nu) = [N_u B_{u\ell}(\nu) - N_\ell B_{\ell u}(\nu)]\, h\nu/c. \qquad (7.9)$$

Koska yhtälöiden (6.54) ja (6.55) mukaan

$$B_{\ell u}(\nu) = g_u/g_\ell\, B_{u\ell}(\nu) = g_u/g_\ell\, c^3/(8\pi h\nu^3)\, A_{u\ell}(\nu),$$

voidaan vahvistuskerroin kirjoittaa muotoon

$$g^H(\nu) = \sigma_{u\ell}{}^H(\nu)\, \Delta N_{u\ell}\,, \qquad (7.14)$$

missä populaatioiden erotus

$$\Delta N_{u\ell} = N_u - g_u/g_\ell\, N_\ell \qquad (7.12)$$

ja stimuloidun emission vaikutusala (engl. stimulated emission cross section)

$$\sigma_{u\ell}{}^H(\nu) = c^2/(8\pi h\nu^2)\, A_{u\ell}(\nu) = \lambda^2/8\pi\;\; A_{u\ell}(\nu). \qquad (7.13)$$

Taajuudella ν_0 saadaan vaikutusalaksi

$$\sigma_{u\ell}{}^H(\nu_0) = c^2 A_{u\ell} / (2\pi\nu_0{}^2\gamma_{u\ell}). \qquad (7.16)$$

Huomaa myös, että homogeeniselle viivanlveydelle on voimassa

$$\gamma_{u\ell} = \gamma_u + \gamma_\ell = 2\pi\,\Delta\nu_{u\ell}{}^{H} \qquad (4.41)$$

ja luonnolliselle viivanleveydelle

$$\Delta\nu_{u\ell}{}^{N} = (\Sigma_i A_{ui} + \Sigma_j A_{\ell j}) / 2\pi. \qquad (4.29, 4.31)$$

Yhdistämällä yhtälöt (7.8) ja (7.14) saadaan

$$\boxed{I = I_0 \exp[\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu)\,\Delta N_{u\ell}\, z],} \qquad (7.18)$$

josta nähdään, että säteilyn intensiteetti kasvaa, jos $\Delta N_{u\ell} > 0$, ja vähenee, jos $\Delta N_{u\ell} < 0$.

DOPPLER-LEVENEMÄN VAIKUTUS

Kun tarkastellaan epähomogeenisen Doppler-levenemän vaikutusta käytetään yhtälössä (7.4) populaatioiden taajuusjakaumia

$$N_{u,\ell}(\nu) = \frac{2\,N_{u,\ell}}{\Delta\nu_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\,\exp\left(-\frac{4\ln 2}{(\Delta\nu_D)^2}(\nu-\nu_0)^2\right). \qquad (4.69)$$

Tällöin Doppler-levenemästä $\Delta\nu_D$ aiheutuvaksi stimuloidun emission vaikutusalaksi tulee

$$\sigma^{D}_{u\ell}(\nu_0) = \sqrt{\frac{\ln 2}{16\pi^3}}\,\frac{c^2 A_{u\ell}}{\nu_0^2\,\Delta\nu_D} = \sqrt{\frac{\ln 2}{16\pi^3}}\,\frac{\lambda^2_{u\ell} A_{u\ell}}{\Delta\nu_D}. \qquad (7.28)$$

Doppler-levenemän vaikutus intensiteettiin voidaan kirjoittaa, samoin kuin yhtälö (7.18), muotoon

$$\boxed{I = I_0 \exp[\sigma_{u\ell}{}^{D}(\nu)\,\Delta N_{u\ell}\, z].} \qquad (7.30)$$

Koska yhtälön (4.59) mukaan $\Delta\nu_D \propto \nu_0\,(T/M_N)^{1/2}$, niin

$$\sigma_{u\ell}{}^{D}(\nu_0) \propto \lambda^3\,(M_N/T)^{1/2}. \qquad (7.29)$$

ABSORPTIO LÄMPÖTASAPAINOSSA

Lämpötasapainossa Boltzmannin jakautuman mukaan $N_u << N_\ell$ ja $\Delta N_{u\ell} < 0$. Tällöin absorptio dominoi ja

$$I = I_0\, e^{-\alpha(\nu)\, z}, \qquad (7.31)$$

(Beerin absorptiolaki) missä "tavallinen" absorptiovakio

$$\alpha(\nu) = -\,\sigma_{u\ell}(\nu)\,\Delta N_{u\ell} \qquad (7.32)$$

on positiivinen.

7.2. POPULAATIOINVERSIO

Yhtälöiden (7.18) ja (7.30) mukaan

$$I = I_0 \exp\{\sigma_{u\ell}\,[N_u - g_u/g_\ell\, N_\ell]\, z\}, \qquad (7.33)$$

josta nähdään, että intensiteetin kasvamiseksi, on oltava voimassa ehto

$$(N_u/g_u) / (N_\ell/g_\ell) > 1 \qquad (7.35)$$

vastoin lämpötasapainon Boltzmannin jakautumaa. Tätä kutsutaan populaatioinversioksi (engl. population inversion) ja se on välttämätön ehto laser-ilmiölle. Se ei kuitenkaan ole vielä riittävä ehto!

7.3. KYLLÄSTYS- ELI SATURAATIO-INTENSITEETTI

Kun vahvistuskerroin $g(\nu) = \sigma(\nu)\,\Delta N$ on positiivinen säteilyn edetessä väliaineessa, kasvaa säteilyn intensiteetti aluksi eksponentiaalisesti tiettyyn rajaan saakka. Eksponentiaalinen kasvu loppuu, kun väliaineen energiatiheys ei enää riitä ylläpitämään sitä. Tätä sanotaan emission saturaatioksi. Matkaa, jolla tämä kyllästysarvo saavutetaan voidaan kutsua kyllästyspituudeksi. Se riippuu tietysti säteilyn alkuperäisestä intensiteetistä I_0, absorption vaikutusalasta σ, populaatioiden erotuksesta ΔN ja väliaineen energiatiheydestä N_u.

Tarkastellaan seuraassa ensin ns. absorption saturaatiota.

Emission kyllästysintensiteetti voidaan määritellä myös siten, että spontaani ja stimuloitu emissio ovat yhtäsuuret

$$I_{sat}\, B_{u\ell}(\nu) / c = A_{u\ell} = 1/\tau\,. \tag{7.39}$$

Tästä seuraa, että

$$I_{sat} = c / [B_{u\ell}(\nu)\,\tau]\,, \tag{7.40}$$

josta edelleen yhtälöiden (6.54) ja (7.13) avulla

$$I_{sat} = h\nu_{u\ell} / [\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu)\,\tau_u]. \tag{7.42}$$

Sellaisissa tilanteissa, joissa viritystilan elinaika on pitkä verrattuna laserpulssiin ($\tau_u > \Delta\tau_p$), on kyllästysintensiteettiä parempi käsite ns. kyllästysenergia

$$E_{sat} = I_{sat}\,\Delta\tau_p\,. \tag{7.43}$$

7.4. LASERSÄTEEN SYNTYMINEN JA KEHITTYMINEN

Tarkastellaan seuraavaksi lasersäteen syntymistä ja intensiteetin kasvamista saturaatioarvoonsa.

Olkoon väliaine sylinterin muotoinen, pituus L ja halkaisija d_a. Oletetaan populaatioinversio hyvin suureksi, $\Delta N \approx N_u >> N_\ell$, jolloin maksimissaan

$$g^H(\nu)\, z \;=\; \sigma_{u\ell}{}^H(\nu)\, \Delta N_{u\ell}\, L$$

säteen lähtiessä sylinterin toisesta päästä alueelta ℓ_g.

Saturaatiointensiteetin saavuttamiselle saadaan siis ehto

$$\exp[\sigma_{u\ell}{}^H(\nu)\, \Delta N_{u\ell}\, L] \;=\; 16\, (L/d_a)^2. \tag{7.47}$$

Pienentämällä suhdetta L/d_a on saturaatiointensiteetti saavutettavissa vähäisellä vahvistuksen $g^H(\nu) \;=\; \sigma_{u\ell}{}^H(\nu)\, \Delta N_{u\ell}$ lisäyksellä. Tällöin kuitenkin säteen divergenssi kasvaa merkittävästi, mistä on seurauksena useita haittoja.

Pituutta L kasvattamalla voidaan taas vahvistuskerrointa $g^H(\nu)$ vastaavasti hieman pienentää. Tyypillisesti $L/d_a \approx 10 - 1000$, jolloin vahvistuksen ja pituuden L tulo

$$\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu)\ \Delta N_{u\ell}\ L \ \approx\ 12 \pm 5. \qquad (7.49)$$

DOPPLERLEVENEMÄN VAIKUTUS

Dopplerlevenemä pienentää populaatiota "$N_u(\nu)$". Tämä näkyy stimuloidun emission vaikutusalan pienentymisenä. Yhtälöistä (7.16), (4.41) ... s. 71 ja (7.28) saadaan

$$\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu_0)\ /\ \sigma_{u\ell}{}^{D}(\nu_0)\ =\ (\pi \ln 2)^{-1/2}\ \Delta\nu^D/\Delta\nu^H. \qquad (7.50)$$

Ratkaisemalla tästä $\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu_0)$ ja sijoittamalla se saturaatioehdon lausekkeeseen seuraa yhtälöä (7.47) vastaavasti

$$(\pi \ln 2)^{-1/2}\ \exp[\sigma_{u\ell}{}^{D}(\nu)\ \Delta N_{u\ell}\ L]\ =\ 16\ (L/d_a)^2. \qquad (7.54)$$

Siten, koska $(\pi \ln 2)^{-1/2} \approx 0.68 \approx 1$,

$$\sigma_{u\ell}{}^{D}(\nu_0)\ \Delta N_{u\ell}\ L\ \approx\ 12 \pm 5, \qquad (7.55)$$

mikä on oleellisesti sama kuin vahvistuksen ja pituuden L tulo (7.49).

7.5. VAHVISTUKSEEN VAIKUTTAVIA TEKIJÖITÄ

Saturaatiointensiteetin saavuttamiseksi tulisi vahvistuksen olla mahdollisimman suuri. Tarkastellaan vahvistukseen $\sigma_{u\ell}(\nu)\ \Delta N_{u\ell}\ L$ vaikuttavia tekijöitä seuraavassa erikseen.

<u>Stimuloidun emission vaikutusala</u> $\sigma_{u\ell}(\nu)$

$$\sigma_{u\ell}{}^{H}(\nu_0)\ =\ c^2 A_{u\ell}\ /\ (4\pi^2\eta^2\nu_0{}^2\Delta\nu^H)\ =\ \lambda_{u\ell}{}^2 A_{u\ell}\ /\ (4\pi^2\eta^2\Delta\nu^H). \qquad (7.16)$$

$$\sigma_{u\ell}^{D}(\nu_0)\ =\ \sqrt{\frac{\ln 2}{16\pi^3}}\ \frac{c^2\ A_{u\ell}}{\nu_0^2\ \eta^2\ \Delta\nu_D}\ =\ \sqrt{\frac{\ln 2}{16\pi^3}}\ \frac{\lambda_{u\ell}^2\ A_{u\ell}}{\eta^2\ \Delta\nu_D} \qquad (7.28)$$

Mahdollisia tekijöitä, joihin voisi vaikuttaa, ei oikeastaan ole.

<u>Viritystilan populaatio</u> $\Delta N_{u\ell}$

Jos esim. $\sigma \approx 10^{-16}$ m^2, tulee olla $\Delta N_{u\ell}\ L \approx 10^{17}$ m^{-2}. Tähän voidaan vaikuttaa tehokkaalla pumppauksella.

<u>Vahvistuspituus ("kaviteetin" pituus)</u> L

Laserväliaineen kokoa ei voi helposti kasvattaa, mutta käyttämällä peilejä sama matka väliaineessa voidaan "käyttää moneen kertaan". Tämä on se "helppo" ratkaisu, jota laserlaitteissa käytetään. Lisäksi peilien käytöstä on apua lasersäteen suuntaamisessa.

7.6. LASERTOIMINNAN KYNNYSEHDOT

Laserin kynnysehdot määräytyvät siitä, että säteilyn tulisi saavuttaa saturaatiointensiteettinsä laserväliaineessa edetessään. Kuten edellä todettiin, helpoin tapa vahvistuksen kasvattamiseksi on väliaineen effektiivisen pituuden lisääminen peileillä.

Esim. Laserväliaineen pituus $L = 12$ cm, halkaisija $d_a = 5$ mm ja vahvistuskerroin $g = 60$ m^{-1}. Saavuttaako säteily saturaatiointensiteettinsä yhdellä väliaineen läpäisyllä? Entä sitten, jos toiseen päähän asetetaan 100% heijastava peili? Mitkä ovat säteen kulma-aukeamat näissä tapauksissa?

Häviöiden aiheuttamat kynnysehdot

Peileissä tapahtuu aina heijastushäviöitä $1 - R$, koska peilin heijastuskerroin on $R < 1$ ($R \approx 1$). Kynnysehdoksi tästä tulee

$$R_1 R_2 \exp[g(\nu_0)\, 2L] \geq 1, \qquad (7.58)$$

kun peilien heijastuskertoimet ovat R_1 ja R_2. Tällöin

$$g(\nu_0) \geq 1/(2L) \ln(1/R^2), \qquad (7.59)$$

kun $R_1 = R_2 = R$.

Peilien lisäksi väliaineen molemmissa päissä voi olla muita häviöitä a_1 ja a_2 aiheuttavia tekijöitä, kuten ikkunoita. Lisäksi väliaineessa voi tapahtua muuta kuin tasoihin $\ell \rightarrow u$ liittyvää absorptiota α. Tällöin kynnysehto on

$$R_1 R_2 (1 - a_1)(1 - a_2) \exp\{[g(\nu_0) - \alpha] 2L\} \geq 1 \qquad (7.60)$$

ja

$$g(\nu_0) \geq 1/(2L) \ln\{1 / [R_1 R_2 (1 - a_1)(1 - a_2)]\} + \alpha. \qquad (7.61)$$

Kun säde läpäisee väliaineen m kertaa, voidaan saturaatioehto (7.49) tai (7.55) kirjoittaa muotoon

$$g(\nu_0)\, mL \approx 12, \qquad (7.62)$$

joten läpäisyjen vähimmäismäärä on

$$m = 12 / g(\nu_0)L. \qquad (7.63)$$

Jos peilien etäisyys toisistaan on d ja valonnopeus väliaineessa c/η, niin saturaatioon tarvittava aika on

$$t_s = md / (c/\eta). \qquad (7.64)$$

Jos $d > L$,

$$t_s = m [\eta_C (d - L) + \eta_L L] / c, \qquad (7.65)$$

missä η_L ja η_C ovat taitekertoimet väliaineessa ja sen ulkopuolella.

7.7. SATURAATIOPOPULAATIO

Edellä emission saturaatiota tarkasteltaessa populaatioiden muutoksen vaikutusta ei otettu huomioon. Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka populaatiot muuttuvat intensiteetin saturoituessa.

Nelitasoisessa väliaineessa

Siis, intensiteetin kasvaessa ($I \rightarrow \infty$) vahvistuskerroin pienenee ($g(\nu) \rightarrow 0$). Käytännössä, jatkuvassa lasertoiminnassa tämä tarkoittaa sitä, että vahvistuskerroin pienenee sellaiseen arvoon, jolla pieni vahvistus kompensoi intensiteetin häviöt: peilin läpäisevä säteen osa, heijastustappiot ja muut absorptiot.

7.8. ULKOINEN LASERVAHVISTIN

Ulkoisessa laservahvistimessa voidaan lasersädettä vahvistaa koherentisti stimuloidun emission avulla. Tällöin ulkoisen vahvistimen spontaanin emission tulee olla pieni verrattuna stimuloituun emissioon.

8. POPULAATIOINVERSION MUODOSTUMINEN

<u>Pääkohdat:</u>

- kahden tason tapaus
- kolmen ja neljän tason systeemit tasapainossa
- populaatioiden aikariippuvuus
- haittatekijöitä: säteilyn "loukkuuntuminen", purkautumiset törmäyksin kautta, absorptiot

8.1. KAHDEN TASON TAPAUS

Kahden tason systeemiin ei voi saada aikaan populaatioinversiota suoraan tavallisin viritysmekanismein, jotka stimuloivat tai aiheuttavat sekä absorptiota että emissiota samalla nopeudella, vrt. absorption saturaatio. Spontaanin emission vuoksi tällöin aina $N_u < N_\ell$.

Diodilaserin toiminta perustuu tavallaan kahden tason systeemiin, mutta siinä pumppaus tehdäänkin tavallisista menetelmistä poikkeavalla tavalla.

8.2. KOLMEN JA NELJÄN TASON SYSTEEMIT

Tyypilliset tasokaaviot ovat

3-TASOINEN, YLÄTASO KESKIMMÄISENÄ

Tarkastellaan suraavaksi kolmitasoista systeemiä, jossa keskimmäinen on u-taso.

Useat termiset viritykset voidaan pieninä unohtaa, koska esim.

$$N_u \gamma_{u\ell} = N_\ell \gamma_{\ell u} \qquad (8.4)$$

ja

$$N_u/N_\ell = e^{-(E_u - E_\ell)/kT},$$

joista seuraa

$$\gamma_{\ell u} / \gamma_{u\ell} = e^{-(E_u - E_\ell)/kT}. \qquad (8.5)$$

Siten $\gamma_{\ell u}$, $\gamma_{\ell i}$ ja γ_{ui} ovat merkityksettömiä.

Tasapainossa (ilman lasersädettä) tasojen miehitykset eivät muutu, joten

3-TASOINEN, ALATASO KESKIMMÄISENÄ

Tarkastellaan suraavaksi kolmitasoista systeemiä, jossa keskimmäinen tasoista on ℓ-taso. Jälleen voidaan olettaa termiset viritykset pieniksi ja kirjoittaa tasapainossa

4-TASOINEN SYSTEEMI

Nelitasoinen rakenne on tyypillinen kiinteän aineen lasereille.

Jälleen samoin kuin edellä jätetään transitionopeudet γ_{0u}, γ_{0i}, $\gamma_{\ell u}$, $\gamma_{\ell i}$ ja γ_{ui} pieninä ottamatta huomioon. Sen lisäksi jätetään tarkastelusta pois purkautumiset $\gamma_{i\ell}$, γ_{i0} ja γ_{u0}, koska ne ovat pieniä tyyppillisissä kiinteissä laserväliaineissa.

Tasapainossa

Näistä saadaan tasapainopopulaatiot

$$N_u = \Gamma_{0i}/\gamma_{u\ell}\ N_0 \tag{8.26}$$

ja

$$N_\ell = (\gamma_{0\ell} + \Gamma_{0i})/\gamma_{\ell 0}\ N_0 \tag{8.27}$$

sekä

$$N_u / N_\ell = \gamma_{\ell 0}\, \Gamma_{0i} / \gamma_{u\ell}(\gamma_{0\ell} + \Gamma_{0i}) \tag{8.28}$$

Populaatioinversio $N_u > N_\ell$ saavutetaan, jos

$$\gamma_{\ell 0}\, \Gamma_{0i} > \gamma_{u\ell}(\gamma_{0\ell} + \Gamma_{0i}),$$

mistä seuraa edelleen ehto

$$\Gamma_{0i} > \gamma_{u\ell}\, \gamma_{0\ell} / (\gamma_{\ell 0} - \gamma_{u\ell}) \tag{8.29}$$

$$\approx \gamma_{u\ell}\, \gamma_{0\ell} / \gamma_{\ell 0} = \gamma_{u\ell} \exp[-(E_\ell - E_0)/kT], \tag{8.30}$$

koska

$$\gamma_{0\ell} / \gamma_{\ell 0} = \exp[-(E_\ell - E_0)/kT].$$

<u>Verrataan edellisiä tapauksia</u>

8.3. POPULAATIOIDEN AIKARIIPPUVUUDESTA

Populaatioiden aikariippuvuudet saadaan ratkaisemalla populaatioiden muutoksia kuvaavat differentiaaliyhtälöt.

Ks. oppikirjan esittämä yksinkertaistettu 3-tasoinen tapaus

8.4. HAITTATEKIJÖITÄ

SÄTEILYN "LOUKKUUNTUMINEN"

"Tiheässä" väliaineessa voi emittoitunut fotoni absorboitua uudelleen käänteisessä transitiossa, mikäli emission lopputilan populaatio on suuri. Tällöin säteilyn effektiivinen emissio pienenee ja sen sanotaan loukkuuntuneen (engl. radiation trapping).

Voidaan osoittaa, että sylinterin muotoisella väliaineella effektiivinen emission transitiotodennäköisyys pienenee kertoimella

$$F_{\ell 0} \approx 1.6 / \{\sigma_{0\ell} N_0 b (\pi \ln[\sigma_{0\ell} N_0 b])^{1/2}\}, \qquad (8.41)$$

missä b on sylinterin säde.

Sopiva stimuloidun emission vaikutusala yhtälöstä (7.28) on

$$\sigma^D_{0\ell} = \frac{g_\ell}{g_0} \sigma^D_{\ell 0} = \frac{g_\ell}{g_0} \sqrt{\frac{\ln 2}{16\pi^3}} \frac{\lambda^2_{\ell 0} A_{\ell 0}}{\Delta\nu^D}, \qquad (8.42)$$

koska Doppler-levenemä on yleensä merkittävä tiheissä väliaineissa.

Säteilyn loukkuuntuminen tulee merkittäväksi, jos ehto

$$\sigma_{0\ell} N_0 b < 1.5 \qquad (8.43)$$

ei ole voimassa.

ELEKTRONIEN TÖRMÄYKSIEN AIHEUTTAMA "TERMALISAATIO"

Kun kaasupurkausta käytetään populaatioinversion synnyttämiseen, energia siirtyy plasmassa vapaana olevilta elektroneilta törmäyksien kautta atomien tai molekyylien virityksiksi. Kuitenkin, jos törmääviä elektroneja on liian paljon, pyrkivät ne siirtämään oman lämpötasapainojakautumansa myös lasertransition alku- ja lopputilojen populaatioihin, ja siten poistamaan miehitysinversion.

Voidaan arvioida, että elektronitiheyttä n_e tulee rajoittaa ehdon

$$n_e < 0.13 \sqrt{T_e} / \lambda_{ul}^3 \ (\mathrm{K})^{-1/2} \quad (8.52)$$

mukaisesti, missä T_e on elektronien lämpötila ja λ on laserin aallonpituus. Elektronien lämpötila voi olla paljonkin suurempi ($\approx 100\,000$ K) kuin ionien lämpötila.

VÄLIAINEEN ABSORPTIO

Väriainelaserin singlettitilojen absorptio- (pumppaus) ja emissiospektrit (lasertransitio) menevät osittain päällekkäin. Absorption vuoksi päällekkäin menevän osan emissiospektriä ei voida käyttää laserissa. Myös triplettitilojen absorptio on haitallista kuten kappaleessa 5.2 todettiin.

Excimer-laserin korkeammat viritykset samoin kuin mahdolliset epäpuhtaudet voivat myös aiheuttaa haitallista absorptiota lasertransition energian alueella. Tällainen virittyneiden tilojen edelleen virittyminen on mahdollinen myös kiinteän aineen laserissa, jossa sitä kutsutaan nimellä "excited-state absorption (ESA).

Puolijohdelaserissa, jota voidaan pitää kaksitasoisena, on virran ylitettävä tietty kynnysarvo populaatioinversion saavuttamiseksi. Puolijohdelaserissa esiintyvä haitallinen absorptio, joka vahvistuksen on ylitettävä, on tyypillisesti luokkaa $0.2\ \mathrm{m}^{-1}$.

9. PUMPPAUS

Pääkohdat:

- optinen pumppaus (salamalamput, laserit)
- hiukkastörmäykset (elektronit, metastabiilit atomit ja ionit)
- kemialliset reaktiot
-

9.1. KYNNYSVAATIMUKSET

Tilasta j ($= 0, \ell, ...$) tilaan u tapahtuva pumppaus $N_j \Gamma_{ju}$ kilpailee virityksen u purkautumisen $N_u \gamma_u$ kanssa. Tässä N_j on tai on ainakin verrannollinen laserväliaineen aktiivisten keskusten määrään: seoste kiinteässä aineessa, väriainemolekyylit, kaasumolekyylit, tms.

Tasapainossa $N_j \Gamma_{ju} = N_u \gamma_u = N_u / \tau_u$, josta seuraa viritystilan u tasapainopopulaatio

$$N_u = N_j \Gamma_{ju} / \gamma_u = N_j \Gamma_{ju} \tau_u . \qquad (9.1)$$

Olettamalla voimakas populaatioinversio $N_u >> N_\ell$ on $N_u \approx \Delta N_{u\ell}$ ja saturaatioehto (7.56) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sigma_{u\ell} N_u L = \sigma_{u\ell} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \geq 12 \pm 5 \qquad (9.2a)$$

väliaineelle ilman peilejä. Kahden peilin tapauksessa $g(\nu_0) \geq 1/(2L) \ln(1/R^2)$ (7.59), jolloin ehto tulee muotoon

$$\sigma_{u\ell} N_u L = \sigma_{u\ell} N_j \Gamma_{ju} \tau_u L \geq 1/(2L) \ln(1/R^2). \qquad (9.2b)$$

Nämä ovat pumppauksen $N_j \Gamma_{ju}$ kynnysehtoja. Kynnysehtojen "reipas" ylitys takaa laserin luotettavan toiminnan.

9.2. PUMPPAUSKANAVAT

SUORA PUMPPAUS

Suora pumppaus tapahtuu perustilasta lasertransition alkutilaan, $0 \rightarrow u$.

Optisella pumppauksella

$$\Gamma_{0u} = B_{ou} I / (c\,\Delta\nu), \qquad (9.3)$$

missä $B_{0u} = c^3 / (8\pi h \nu^3)\ A_{0u}$, I on (salama)valon intensiteetti absorption viivanleveydellä $\Delta\nu$.

Hiukkastörmäyksillä pumpattaessa

$$\Gamma_{0u} = N_p k_{0u} , \qquad (9.4)$$

missä N_p on törmäävien hiukkasten tiheys ja

$$k_{0u} = \bar{v}_{p0} \sigma_{0u} \qquad (9.5)$$

on tavallaan virityksen $0 \rightarrow u$ reaktionopeus, joka riippuu törmäävien hiukkasten keskimääräisestä nopeudesta $\bar{v}_{p0}$ ja törmäysvaikutusalasta σ_{0u}. Elektronien tapauksessa esim.

$$\Gamma_{0u} = n_e \bar{v}_e \sigma^e_{0u} . \qquad (9.7)$$

Pumppaustehon lausekkeeksi (tilavuusyksikköä kohti) tulee

$$P_{0u} = \Gamma_{0u} N_0 \Delta E_{0u} , \qquad (9.8)$$

kun pumppauksen absorboivan virityksen energia on ΔE_{0u}.

EPÄSUORA PUMPPAUS

Epäsuoraan pumppaukseen liittyy välitila q, josta laserin ylätila u virittyy energian siirrolla hiukkastörmäyksien kautta

$$\Gamma_{qu} N_q = N_p \bar{v}_p \sigma_{qu} N_q$$

tai fotonien välittämänä

$$\Gamma_{qu} N_q = B_{qu} I / (c\, \Delta\nu)\ N_q.$$

Yleisesti siirrossa tapahtuva energianmuutos ΔE_{qu} voi olla positiivinen tai negatiivinen, mutta sen on oltava pieni.

Välitilan käytöstä ja olemassaolosta voi olla useanlaisia etuja. Jos sen elinaika τ_q on suuri, voi välitila toimia "varastona"; jos se on "leveä" tai sen virityksellä on suuri vaikutusala, on pumppaus sen kautta helppoa; ja lisäksi välitila q voi olla sopivasti pumppaukselle selektiivinen.

Tarkastellaan seuraavaksi yksityiskohtaisemmin esimerkkeinä joitakin lasereita, joissa käytetään epäsuoraa pumppausta.

Ar^+-ionilaserissa ionin perustila on välitilana, kun taas neutraalin atomin perustila on alin tila. Siirrossa tapahtuva energianmuutos ΔE_{qu} on posiivinen, mihin tarvittava energia, samoin kuin välitilan viritysenergiakin, saadaan elektronitörmäyksistä.

Helium–neonlaserin pumppaus tapahtuu kaasupurkauksen avulla, jolloin molempien kaasukomponenttien atomit virittyvät. He-atomit viritystilat 2s $^3S_1$ ja 2s $^1S_0$ ovat pitkäikäisiä metastabiileja tiloja, jotka toimivat varastoina.

Metastabiilit He-atomit antavat viritysebergiansa Ne-atomeille törmäyksissä, joissa liikemäärän ja energian säilymislait edellyttävät, että molempien atomien viritysenergiat ovat likimain yhtäsuuret, $\Delta E_{qu} \approx 0$.

Tilanne on samanlainen CO_2-laserissa, jossa N_2-molekyylien energia siirtyy törmäyksien kautta CO_2-molekyyleille.

Tavallisimmissa energiansiirtoprosesseissa $q \rightarrow u$ on siirron energia kuitenkin negatiivinen, $\Delta E_{qu} < 0$, jolloin se voi tapahtua "spontaanisti". Tällaisia ovat mm. tyypilliset 4-tasoiset laserit. Ks. kirjan kuvat 9.11 – 9.15.

9.3. PUMPPAUKSEN TOTEUTUS

Optisessa pumppauksessa voidaan käyttää erilaisia rakenteellisia ratkaisuja ja geometrisia konstruktioita tehokeinoina, ks. kirjan kuva 9-16.

Poikittainen pumppaus tapahtuu lasersäteen suhteen kohtisuorasta suunnasta. Siinä on tehokasta käyttää elliptisiä peilejä tai sylinterilinssejä.

Pitkittäinen pumppaus eli "end pumping" on taas konstruktio, jossa pumppaus tapahtuu lasersäteen suunnasta. Tällä tekniikalla voidaan pumppausteho kohdistaa tarkasti haluttuun aktiiviseen alueeseen.

Tavallisesti laserväliaineen vahvistuskerroin on verrannollinen pumppauksessa käytetyn säteilyn intensiteettiin,

$$g_0(\nu_0) \propto I_{in}. \qquad (9.18)$$

Verrannollisuuskerroin riippuu konstruktiosta.

Edellisestä johtuen laserista saatava säteilyteho P_{out} riippuu yleensä lineaarisesti pumppaustehosta P_{in},

$$P_{out} = \sigma_s (P_{in} - P_{th}), \qquad (9.21)$$

missä σ_s on häviöistä riippuva verrannollisuuskerroin, ns. "slope efficiency". Sen teoreettinen maksimi on $1 \sim 45° \sim 100\ \%$. Käytännössä se on tavallisesti $5\ \%$ luokkaa.

9.4. HIUKKASTÖRMÄYKSIEN KÄYTTÖ

Plasman elektronien voidaan ajatella noudattavan Boltzmannin jakautumaa ja niiden liikkeen keskinopeuden olevan

$$\bar{v_e} = [(8kT_e)/(m_e\pi)], \qquad (9.25)$$

missä T_e on elektronien lämpötila ja m_e on elektronien massa. Elektronien nopeudet ovat kaasupurkausputkessa tyypillisesti luokkaa $10^6 - 10^7$ m/s, ja lämpötilat vastaavasti luokkaa 10^5 K.

Elektronit saavat kineettisen energiansa sähkökentästä E ja menettävät energiaansa törmäyksissään atomeihin ja ioneihin. Törmäystaajuus riippuu paineesta p ja siksi elektronien keskinopeus riippuu suhteesta E/p.

Elektronitörmäyksillä aikaan saadun pumppauksen lauseke

$$\Gamma_{0u} N_0 = n_e \bar{v_e} \sigma^e_{0u} N_0, \qquad (9.26)$$

missä vaikutusala σ^e_{0u} on tyypillisesti luokkaa 10^{-21} m^2. Jos kuitenkin transitio $0 \rightarrow u$ on kielletty (säteilevänä transitiona), on törmäyksellä virittäminenkin vaikeampaa ja vaikutusala tyypillisesti luokkaa $10^{-23} - 10^{-24}$ m^2.

Myös muita (raskaampia) hiukkasia voidaan käyttää, jolloin vastaavasti pumppauksen lausekkeessa

$$\Gamma_{0u} N_0 = N_s V_s \sigma^s_{0u} N_0, \qquad (9.27)$$

N_s, V_s ja σ^s_{0u} ovat näiden hiukkasten vastaavia suureita. Vaikutusala esim. atomeille on luokkaa 10^{20} m^2.

OSA IV
RESONAATTORIT

10. PITKITTÄISET JA POIKITTAISET MOODIT

Pääkohdat:
- optinen resonaattori
- Fabry–Perot-interferometri (resonaattori)
- pitkittäiset moodit
- poikittaiset moodit
- intensiteetin pikittainen jakautuma (Gaussin jakautuma)

10.1. PITKITTÄISET MOODIT

Etsitään seisovia sähkömagneettsia aaltoja kahden yhdensuuntaisen peilin muodostamassa resonaattorissa.

Yleistetään tarkastelu tilanteeseen, jossa peilit ovat osittain läpäiseviä, heijastuskerroin sähkökentälle on r ja transmissiokerroin t. Tämä on ns. Fabry–Perot-interferometri. Oletetaan lisäksi, että sm-aalto tulee interferometriin ulkopuolelta ja vinosti (kulmassa θ normaalin suhteen) ja että taitekerroin $\eta = 1$.

Optinen matkaero yhden peilien välissä tapahtuvan edestakaisen matkan vuoksi on

Siten sm-aallon $E(z,t) = E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$ matkasta $z = 2d \cos\theta$ aiheutuva vaihe-ero on

Lasketaan läpi menneen sähkökentän amplitudi

Tämä on geometrinen sarja ja suppenee, koska $|\, r^2 e^{i\phi} \,| < 1$.

Läpi menneen sähkökentän amplitudi on siten

$$E_t = E_0\, t^2 / (1 - r^2 e^{i\phi}) \qquad (10.7)$$

Vastaava intensiteetti on

$$I_t = |E_t|^2 = E_0^2 |t|^4 / |1 - r^2 e^{i\phi}|^2. \qquad (10.8)$$

Merkitään intensiteetin heijastus- ja transmissiokertoimia

$$r^2 = |r|^2 e^{i\phi_r}, \qquad (10.9)$$

$$R = |r|^2 \qquad (10.10)$$

ja

$$T = t^2, \qquad (10.11)$$

missä ϕ_r on kahdessa heijastuksessa yhteensä mahdollisesti tapahtunut vaihesiirto.

Tällöin

$$I_t = I_0 T^2 / |1 - R e^{i\Phi}|^2, \qquad (10.12)$$

missä

$$\Phi = \phi + \phi_r \qquad (10.13)$$

on kokonaisvaihesiirto $2d \cos\theta$ matkalla.

Kun merkitään

$$F' = 4R / (1 - R)^2, \qquad (10.15)$$

voidaan interferometrin läpi mennyt intensiteetti kirjoittaa

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + F' \sin^2(\Phi/2)} . \qquad (10.16)$$

Edelleen, jos heijastustappioita ja muita häviöitä ei ole, niin $T = 1 - R$, ja saadaan

$$I_t / I_0 = [1 + F' \sin^2(\Phi/2)]^{-1}. \qquad (10.18)$$

Tämä on Airy-funktio.

Airy-funktio on jaksollinen ja sen jakso on sama kuin $\sin^2$-funktion jakso, π. Maksimien paikat (vaihesiirroilla Φ_{max}) saadaan ehdosta $\Phi_{max}/2 = n\pi$, josta

$$\Phi_{max} = 2n\pi = 2kd \cos(\theta + \phi_r) = 4\pi d/\lambda \cos\theta + \phi_r \qquad (10.20)$$

Läpäisypiikin puoliarvoleveys saadaan ehdosta $I_t(\Phi) / I_0 = 1/2$ eli $[1 + F' \sin^2(\Phi/2)]^{-1} = 1/2 \Rightarrow F' \sin^2(\Phi/2) = 1$. Jos piikki on kapea,

$$\text{FWHM} = 2\,\Phi' = 4 / \sqrt{F'} \qquad (10.23)$$

Intensiteettimaksimien etäisyydet ovat $\Delta\Phi = 2\pi$, jonka suhde viivanlevelyteen on

$$F = \Delta\Phi / \mathrm{FWHM} = \pi\sqrt{F'} / 2 = \pi\sqrt{R} / (1 - R). \quad (10.25)$$

Luku F (engl. finesse) kertoo kuinka monikertainen "vapaa spektrialue" (engl. free spectral range) on puoliarvoleveyteen verrattuna. Esim. jos $R = 0.98$, niin $F \approx 160$.

Jos resonaattorin kahden peilin heijastuskertoimet eivät ole samat, vaan R_1 ja R_2, niin tällöin

$$F = \pi(R_1R_2)^{1/4} / [1 - (R_1R_2)^{1/2}]. \quad (10.26)$$

Jos valo tulee nyt kohtisuoraan peilejä vastaan, $\theta = 0$, ja jos myös $\phi_r = 0$, niin resonaattorin maksimien paikat saadaan yhtälöstä (10.20) tuttuun muotoon

$$n\,\lambda/2 = d. \quad (10.27)$$

(Jos heijastuminen tapahtuu metallipinnasta, ei ϕ_r ole välttämättä 0 tai π, kuten eristeen tapauksessa) Kun merkitään edellisestä saatavia aallonpituuksia λ_n^{max} ja niitä vastaavia taajuuksia ν_n^{max}, niin

$$\lambda_n^{max} = 2d / n \quad (10.28)$$

ja

$$\nu_n^{max} = n\,c / 2\eta d, \quad (10.29)$$

kun valonnopeus on c/η.

Näitä "sallittuja" tai resonoivia taajuuksia tai aallonpituuksia sanotaan Fabry–Perot-resonaattorin moodeiksi.

Moodien etäisyydet eli maksimien taajuuksien erot eivät riipu taajuudesta, vaan se on vakio

$$\Delta\nu = c / 2\eta d, \quad (10.31)$$

missä ηd on resonaattorin optinen pituus.

Taajuusspektrin viivojen puoliarvoleveys voidaan kirjoittaa vielä edellisen avulla muotoon

$$\Delta\nu_{FWHM} = \Delta\nu / F. \quad (10.33)$$

Resonaattorin ns. Q-arvo määritellään

$$Q = \nu_0 / \Delta\nu_{FWHM} = F\,\nu_0 / \Delta\nu$$
$$= 2\pi\eta d\,\nu_0\,\sqrt{R} / [c(1 - R)]. \quad (10.35)$$

Myös Q-arvo kuvaa moodien "terävyyttä" suhteessa niiden keskinäiseen etäisyyteen samoin kuin finessekin.

Pitkittäiset moodit

Kun laserväliaine asetetaan resonaattoriin, vahvistuvat siinä ehtojen (10.28) ja (10.29) mukaiset taajuudet

$$\nu = n\,c / 2\eta d, \quad (10.39)$$

missä n on moodin järjestysluku. Se numeroi laserin pitkittäiset moodit, joista vahvistuvat stimuloidun emission viivanleveyden alueelle $\nu_0 \pm \Delta\nu^D/2$ osuvat ja kynnysvaatimukset ylittävät taajuudet.

Esim. He–Ne-laser, jonka resonaattorin pituus on 0.5 m. Moodien etäisyys on tällöin $\Delta\nu = c / 2d = 0.6$ GHz. Taulukosta 4–1, sivulta 35, saadaan Doppler-levenemä $\Delta\nu^D = 1.5$ GHz, johon mahtuu nyt 3 moodia.

10.2. POIKITTAISET MOODIT

Pitkittäisiä moodeja tarkasteltaessa oletettiin peilien välissä resonoiva sm-aalto tasoaalloksi. Aaltorintaman poikittaista kokoa rajoittavat kuitenkin peilien koko, väliaine tai jokin tarkoituksella asetettu kaihdin tai "aukko" (engl. aperture). Tarkastellaan seuraavassa edellisestä aiheutuvan diffraktion vaikutusta lasersäteen pikittaiseen intensiteettijakautumaan.

Oletetaan aluksi, että peilit ovat tasopeilejä ja sm-aalto syntyy peilien välissä (kuten laserissa).

Fresnel–Kirchoffin diffraktiokaava

Greenin kaavassa

$$\int_A (V\, \nabla U - U\, \nabla V) \cdot d\mathbf{A} = \int_\tau (V\, \nabla^2 U - U\, \nabla^2 V) \cdot d\tau \qquad (1)$$

funktiot $V(\mathbf{r})$ ja $U(\mathbf{r})$ ovat "kiltisti käyttäytyviä" paikkavektorin skalaarifunktioita suljetun pinnan A rajoittamassa tilavuudessa τ.

Jos nämä funktiot ovat aaltofunktioita ja toteuttavat yhtälöt

$$\nabla^2 U = 1/u^2\, \partial^2 U/\partial t^2 \quad \text{ja} \quad \nabla^2 V = 1/u^2\, \partial^2 V/\partial t^2$$

ja niiden aikariippuvuus on muotoa $e^{-i\omega t}$, jolloin

$$\partial^2 U/\partial t^2 = -\omega^2 U \quad \text{ja} \quad \partial^2 V/\partial t^2 = -\omega^2 V,$$

niin $(V\, \nabla^2 U - U\, \nabla^2 V) = 0$ ja yhtälöstä (1)seuraa

$$\int_A (V\, \nabla U - U\, \nabla V) \cdot d\mathbf{A} = 0. \qquad (2)$$

Valitaan nyt funktioksi $V(\mathbf{r})$ palloaalto, joka konvergoi kohti origoa

$$V(r) = V_0\, e^{i(kr + \omega t)} / r. \qquad (3)$$

Tämä funktio divergoi origossa, joten erotetaan origo pois integrointialueesta pienellä origokeskeisellä ρ-säteisellä pallolla. Sijoittamalla nyt V yhtälöstä (3) yhtälöön (2) saadaan

$$\int_A (e^{ikr}/r\, \nabla U - U\, \nabla e^{ikr}/r) \cdot d\mathbf{A} - \int_{pallo} (e^{ikr}/r\, \nabla U - U\, \nabla e^{ikr}/r)_{r=\rho} \cdot d\mathbf{A}_{pallo} = 0.$$

ja edelleen

$$\int_A (e^{ikr}/r\, \nabla_n U - U\, \nabla_n e^{ikr}/r)\, dA + \\ - \int_{pallo} (e^{ikr}/r\, \partial U/\partial r - U\, (\partial/\partial r) e^{ikr}/r)_{r=\rho}\, \rho^2\, d\Omega = 0.$$

Kun nyt $\rho \to 0$, niin

$$\int_{\text{pallo}} [e^{ikr}/r\ \partial U/\partial r - U\ e^{ikr}/r\ (ik - 1/r)]_{r=\rho}\ \rho^2\ d\Omega\ \to\ 4\pi\ U_P\ ,$$

missä U_P on funktion U arvo origossa. Siten

$$U_P\ =\ -\ 1/4\pi \int_A (e^{ikr}/r\ \nabla U - U\ \nabla e^{ikr}/r)\cdot\ d\mathbf{A} \qquad (4)$$

Funktion U arvo suljetun alueen sisällä olevassa pisteessä P saadaan siis funktion käyttäytymisestä ympäröivän alueen pinnalla. Tämä on Kirchoffin integraalikaava.

Sovelletaan nyt saatua tulosta (4) diffraktioon. Valo tulee lähteestä S aukkoon, jonka läpäistyään sitä tarkastellaan pisteessä P.

Integroimisalueeksi valitaan pinta, joka sisältää aukon ja jonka sisään jää piste P. Valitaan suljettu alue niin suureksi, että funktio U ja sen gradientti vaikuttavat aukkoa lukuunottamatta integraaliin (4) vain hyvin vähän. Oletetaan, että U ja ∇U saavat aukossa samat arvot kuin ilman aukoin ympärillä olevaa varjostintakin.

Lähteen S synnyttämä kenttä aukon pisteessä $\mathbf{r}'$ on

$$U(r)\ =\ U_0\ e^{i(kr' - \omega t)}\ /\ r'. \qquad (3)$$

Sovelletaan Kirchoffin integraalikaavaa (4), jolloin

$$U_P\ =\ U_0\ e^{-i\omega t}/4\pi \int_{\text{aukko}} (e^{ikr}/r\ \nabla e^{ikr'}/r' - e^{ikr'}/r'\ \nabla e^{ikr}/r)\cdot\ d\mathbf{A}.$$

Tästä saadaan

$$U_P\ =\ -ikU_0\ e^{-i\omega t}/4\pi \int_{\text{aukko}} e^{ik(r+r')}/rr'\ [\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')]dA. \qquad (10.42)$$

Tätä yhtälöä sanotaa Fresnel–Kirchoffin diffraktiokaavaksi.

Fresnel–Kirchoffin diffraktiokaava on itse asiassa Huygensin periaatteen matemaattinen esitysmuoto. Tämä nähdään tarkastelemalla tilannetta, jossa lähde sijaitsee symmetrisesti ympyränmuotoiseen aukkoon nähden. Tällöin r' on vakio ja $\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}') = -1$. Yhtälö (10.42) tulee tällöin muotoon

$$U_P\ =\ -ik/4\pi \int_{\text{aukko}} U_A/r\ \ e^{i(kr-\omega t)}\ [\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) + 1]dA, \qquad (10.43)$$

missä $U_A = U_0\ e^{ikr'}/r'$ on tulevan aallon kompleksinen amplitudi aukossa. Jokainen aukon elementti dA synnyttää sekundäärisen palloaallon $U_A/r\ \ e^{i(kr-\omega t)}\ dA$. Pisteessä P havaittava kenttä U saadaan laskemalla yhteen eri elementtien synnyttämät elementaariaallot.

Takaisinpäin ei lähde aaltoja, sillä tällöin $\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) + 1 = 0$.

Tasopeiliresonaattori

Laserresonaattorissa saadaan kompleksinen amplitudi toisen peilin pinnalla Fresnel–Kirchoffin kaavasta, jos se tunnetaan toisen peilin pinnalla.

$$U_2(x_2,y_2) = -ik/4\pi \int\int_{peili} U_1(x_1,y_1)\ e^{ikr}/r\ [\cos\theta + 1]dx_1dy_1, \quad (10.45)$$

missä

$$r^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + d^2. \quad (10.44)$$

Tavallisesti resonaattorin peilit ovat identtisiä muodoiltaan. Tällöin stationäärisessä tilanteessa, joka saavutetaan, kun heijastuksia on tapahtunut jo useita molemista peileistä, funktiot U_1 ja U_2 tulevat olemaan vakiota vaille samat. Tästä voidaan kirjoittaa ehto

$$\gamma\ U(x_2,y_2) = \int\int_{peili} U(x_1,y_1)\ K(x_1,y_1,x_2,y_2)\ dx_1dy_1, \quad (10.46)$$

missä

$$K(x_1,y_1,x_2,y_2) = -ik/4\pi\ (1 + \cos\theta)\ e^{ikr}/r. \quad (10.47)$$

Tämä on integraaliyhtälö, jonka ns. kernel funktio $K(x_1,y_1,x_2,y_2)$ on. Tätä yhtälöä ei voida ratkaista analyyttisesti.

Integraaliyhtälö (10.46) on ominaisarvoyhtälö ja sillä on ääretön määrä ratkaisuja U_n ja niitä vastaavia ominaisarvoja

$$\gamma_n = |\gamma_n|\ e^{i\phi_n}. \quad (10.48)$$

Koska γ on amplitudifunktion vaimennuskerroin on yhden läpäisyn häviö intensiteetille

$$1 - |\gamma_n|^2. \quad (10.49)$$

Integraaliyhtälö (10.46) voidaan ratkaista numeerisesti tai sitten se likimääräistä ratkaisua voidaan etsiä approksimaatiolla

$$K(x_1,y_1,x_2,y_2) = C\ e^{-ik(x_1x_2+y_1y_2)}. \quad (10.50)$$

Tällöin

$$\gamma\ U(x_2,y_2) = C \int U(x_1,y_1)\ e^{-ik(x_1x_2+y_1y_2)}\ dx_1dy_1, \quad (10.51)$$

joten funktio U on itsensä Fourier-muunnos. Yksinkertaisin tällainen funktio on Gaussin funktio

$$U(x,y) = \exp(-\rho^2/w^2), \quad (10.52)$$

missä $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Funktiot, jotka ovat itsensä Fourier-muunnoksia ovat yleisemmin Hermiten polynomien ja Gaussin funktion tuloja

$$U_{pq}(x,y) = H_p(x\sqrt{2} / w)\ H_q(y\sqrt{2} / w)\ \exp(-\rho^2/w^2), \quad (10.53)$$

missä $H_0(u) = 1$, $H_1(u) = 2u$, $H_2(u) = 2(2u^2-1)$ ja

$$H_m(u) = (-1)^m\ e^{u^2}\ d^m(e^{-u^2})/du^m. \quad (10.54)$$

Kokonaislukujen p ja q avulla nimetään poikittaiset aähkömagneettiset moodit (engl. transverse electromagnetic modes, TEM) TEM_{pq}. Alin moodi (10.52) on TEM_{00}. Se on ympyräsymmetrinen.

Esim.

$U_{00}(x,y)$ =

$U_{01}(x,y)$ =

Myös poikittaisilla moodeilla on hieman toisitaan poikkeavia taajuuksia, mutta erot ovat pienempiä kuin pitkittäisillä moodeilla. Sen sijaan yhden poikittaisen moodin kuvio muodostuu useamman pitkittäisen moodin yhteisvaikutuksena.

Jos valo läpäisee lasipintoja, on tällöin edullisinta käyttää ns. Brewsterin kulmaa, jolloin heijastustappiot ovat vähäisimmät.

Kaarevapintaiset peilit

Resonaattorin häviöitä voidaan vähentää merkittävästi käyttämällä esim. pallopeilejä, säde R. Tavallisesti $R < d < 2R$.

10.3. LASERIN MOODIT JA VAHVISTUS

Spectral hole burning

Kun väliaineen viritystilan epähomogeeninen levenemä (esim. Doppler-levenemä) on suuri verrattuna moodien väliseen etäisyyteen, voi useita moodeja virittyä samanaikaisesti. Jos nyt luonnollinen viivanleveys on pieni, tulee vain moodien kohdalle sattuvat taajuudet vahvistetuksi ja muilla taajuuksilla oleva energia jää väliaineesta käyttämättä.

Spatial hole burning

Pitkittäisten moodien seisovien aaltojen solmukohdissa sähkökenttä häviää eikä voi aiheuttaa stimuloitua emissiota. Näissä kohdin väliainetta jää viritysenergia käyttämättä.

11. RESONAATTORIN STABIILISUUS

Pääkohdat:

- kaarevapintaisten peilien käyttö resonaattorissa
- resonaattorin stabiilisuusanalyysi
- Gaussin jakautunut lasersäde
- resonaattorin ja vahvistuksen optimointi

11.1. KAAREVAPINTAISET PEILIT

Resonaattorissa voidaan käyttää kaarevapintaisia peilejä, kuten edellä jo todettiin kappaleessa 10.2. Ks. myös kirjan kuva 11-1. Sopivasti asetetuilla koverilla peileillä voidaan säteen "hajoamisen" vuoksi resonaattorista karkaavan tehon osuutta vähentää. Resonaattoria sanotaan stabiiliksi, jos se pyrkii vangitsemaan valon peilien väliin.

Resonaattorien stabiilisuutta voidaan analysoida helposti ns. ABCD-matriisien avulla. Siinä kuvataan optisen elementin (peilin, linssin, taittavan pinnan, tms.) vaikutusta matriisilla. Tällöin esim. peräkkäisiä heijastuksia voidaan kuvata niitä vastaavien matriisien tulolla.

ABCD-matriisin avulla kuvataan säteen etenemistä pisteestä r_1 pisteeseen r_2 ja samalla kun säteen suuntakulma mahdollisesti muuttuu arvosta θ_1 arvoon θ_2. Kertoimet A, B, C ja D määrätään siten, että matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \qquad (11.4)$$

antaa halutun muunnoksen.

Tarkastellaan säteen etenemistä pisteestä r_1 pisteeseen r_2 oheisten kuvien mukaisesti.

Esim. kaksi ohutta linssiä (f_1 ja f_2)

Resonaattorin stabiilisuuskriteeri

Tarkastellaan resonaattoria, jonka muodostavat kaksi etäisyydelle d asetettua R-säteistä pallopeiliä, joiden polttovälit ovat $f = R/2$. Säteen kulku on ekvivalentti hyvin monen etäisyydelle d toisistaan asetetun f-polttovälisen linssijonon läpäisyn kanssa. Peilistä lähteneen (r_1,θ_1)-säteen kuvautuminen (r_2,θ_2)-säteeksi etäisyyden d siirtymisen ja heijastumisen jälkeen voidaan nyt kirjoittaa ABCD-matriisien avulla muotoon

Tästä seuraa, että

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1-d/f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{11.7}$$

Jotta resonaattori olisi stabiili, tulisi olla $r_2 < r_1$ ja/tai $\theta_2 < \theta_1$.

Etsitään ratkaisua, jossa

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

ja $\lambda < 1$. Siis,

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \tag{11.9}$$

josta seuraa

eli

$$\begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{11.10}$$

Tällä homogeenisella yhtälöparilla on ratkaisuja vain, jos sen kerroindeterminantti häviää, eli

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{11.11}$$

ja sovellettuna nyt tarkasteltavaan resonaattoriin

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & d \\ -1/f & 1-d/f-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{11.12}$$

Tästä saadaan 2. asteen yhtälö

$$\lambda^2 - \lambda\,(2 - d/f) + 1 \;=\; 0 \qquad (11.13)$$

ja

$$\lambda^2 - 2g\lambda + 1 \;=\; 0, \qquad (11.14)$$

missä

$$g \;=\; 1 - d\,/\,2f. \qquad (11.14a)$$

Tästä saadaan ratkaisut

$$\lambda \;=\; g \pm (g^2 - 1)^{1/2}, \qquad (11.15)$$

jos $|g| > 1$, tai

$$\lambda \;=\; g \pm i(1 - g^2)^{1/2}, \qquad (11.16)$$

jos $|g| < 1$.

Kun heijastuksia on tapahtunut suuri lukumäärä, N kappaletta,

$$\begin{bmatrix} r_N \\ \theta_N \end{bmatrix} \;=\; \lambda^N \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \qquad (11.17)$$

jolloin stabiilisuusehto on $|\lambda^N| \le 1$. Tapaus $|g| > 1$ vastaa kuperia peilejä, eikä täytä tätä ehtoa. Sen sijaan $|g| \le 1$ vastaa koveria peilejä ja tällöin

$$|\lambda| \;=\; |g \pm i(1 - g^2)^{1/2}| \;=\; g^2 + (1 - g^2) \;=\; 1$$

ja stabiilisuus voidaan saavuttaa. Siis

$$\lambda \;=\; (1 - d\,/\,2f) \pm i\,[1 - (1 - d\,/\,2f)^2]^{1/2}$$

$$=\; (1 - d\,/\,2f) \pm i\,[d/f\,(1 - d\,/\,4f)]^{1/2} \qquad (11.20)$$

on oltava imaginäärinen.

Siksi

$$4f > d, \qquad (11.21)$$

tai kun $f = R/2$,

$$d < 2R. \qquad (11.22)$$

Jos peilien polttovälit eivät ole samat, voidaan edellä oleva tarkastelu yleistää ja stabiilisuusehdoksi tulee

$$0 \;<\; g_1 g_2 \;<\; 1, \qquad (11.23)$$

missä nyt

$$g_1 \;=\; 1 - d/R_1$$

ja

$$g_2 \;=\; 1 - d/R_2. \qquad (11.24)$$

Stabiilisuus voidaan esittää graafisesti, jolloin erikoispisteet $g_1 = g_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 0$ ja $g_1 = g_2 = -1$ vastaavat tasopeiliresonaattoria

$R_1 = R_2 = \infty$,

konfokaalia resonaattoria $R_1 = R_2 = d$

ja konsentristä resonaattoria $R_1 = R_2 = d/2$,

tässä järjestyksessä.

11.2. "GAUSSILAISEN SÄTEEN" OMINAISUUKSIA

TEM_{00}-moodin poikittainen amplitudijakautuma on "gaussilainen". Gaussilainen jakautuma säilyy gaussilaisena, ellei resonaattori aiheuta siihen vääristymiä. Gaussilaista sädettä voidaan kuvata resonaattorin optisella akselilla paikassa z kahdella parametrillä: sen "vyötärön" paksuudella $w(z)$ (engl. beam waist) ja aaltorintaman kaarevuussäteellä $R(z)$.

Kun poikittainen sähkökentän amplitudijakautuma on $U_0\ e^{-r^2/w^2}$, on intensiteettijakautuma

$$I = I_0\ e^{-2r^2/w^2}. \tag{11.27}$$

Tällöin $85\ \%$ tehosta kulkee w-säteisen ympyrän läpi.

Konfokaalissa resonaattorissa, jossa $R_1 = R_2 = d$, on vyötärö kapeimmillaan resonaattorin puolivälissä z_0 ja muualla

$$w(z) = w_0\,(1 + (z - z_0)^2/z_R^{\,2})^{1/2}, \tag{11.30}$$

missä

$$z_R = \pi w_0^{\,2} / \lambda \tag{11.31}$$

on "fokuksen syvyys" (engl. Rayleigh range).

Kun valitaan $z_0 = 0$, niin aaltorintaman kaarevuussäde on

$$R(z) = z\,[1 + (\pi w_0^{\,2} / \lambda z)^2]. \tag{11.32}$$

Säteen kulma-aukeama on

$$\theta(z) = 2\lambda / \pi w_0, \tag{11.33}$$

kun $z > z_R$.

Symmetrisessä resonaattorissa, jonka pituus on d ja peilien kaarevuussäteet R, säteen minimivyötärö w_0 saadaan lausekkeesta

$$w_0^{\,2} = \lambda/2\pi\ [d\,(2R - d)]^{1/2} \tag{11.34}$$

ja aaltorintaman kaarevuussäde on

$$R(z) = z + d\,(2R - d) / 4z. \tag{11.35}$$

Stabiilissa resonaattorissa peilien kaarevuussäteet ovat samat kuin aaltorintaman kaarevuussäde sen heijastuessa peileistä.

11.3. TODELLISTEN LASERSÄTEIDEN OMINAISUUKSIA

Todellisissa lasersäteissä on myös korkeampien kertalukujen poikittaisia moodeja, joten niiden ominaisuudet poikkeavat ideaalisesta gaussilaisesta, diffraktion sallimasta rajasta (engl. diffraction-limited).

Todellista sädettä on tapana luonnehtia sen minimivyötärön W_0 ja kulma-aukeaman Θ tulolla, ja verrata sitä ideaalisen gaussilaisen vastaavaan

$$w_0\,\theta = w_0\,2\lambda/\pi w_0 = 2\lambda/\pi. \tag{11.39}$$

Jos

$$\Theta = M\,\theta \tag{11.40}$$

ja

$$W_0 = M\,w_0, \tag{11.41}$$

niin

$$\Theta\,W_0 = M^2\,2\lambda/\pi, \tag{11.42}$$

missä M^2 on säteen ns. etenemisvakio (engl. propagation constant). M^2 on mitattavissa oleva suure ja sitä voidaan käyttää hyväksi resonaattorin säätämisessä.

12. LASERTOIMINTAAN LIITTYVIÄ ILMIÖITÄ

Pääkohdat:

- epästabiilt resonaattorit
- Q-kytkentä ja jättiläispulssit
- moodilukitus

12.1. EPÄSTABIILIT RESONAATTORIT

Resonaattori on epästabiili, ellei se täytä edellä annettua stabiilisuusehtoa $0 < g_1\,g_2 < 1$. Sellaisia resonaattoreita voidaan kuitenkin käyttää, jos halutaan suuri teho ja gaussilainen intensiteettijakautuma. Tällöin väliaineen vahvistuskertoimen on oltava riittävän suuri, jotta säteen ei tarvitse läpäistä resonaattoria useita kertoja.

Stabiilien resonaattorien haittana voi olla se, etteivät ne käytä tehokkaasti hyväkseen kaikkea väliaineeseen pumpattua energiaa "liiallisen" säteen kavennuksen vuoksi.

Epästabiileja resonaattoreita voidaan haluta käyttää, jos

1) siten saadaan väliaineen koko tilavuus ja siihen pumpattu energia paremmin hyödynnetyksi,

2) halutaan maksimiteho lyhyellä resonaattorilla, tai

3) väliaineen vahvistuskerroin on riittävän suuri, jolloin vain muutama säteen läpäisy riittää.

Tavallisimmissa epästabiileissa resonaattoreissa peilien kaarevuussäteet ovat erisuuret, takapeili R_r ja etupeili (ulostulo) R_o. Tällöin geometrinen suurennus on

$$M = R_r / R_o. \tag{12.1}$$

Stabiilisuusehdon $0 < g_1 g_2 < 1$ ulkopuolelle jää kaksi aluetta

$$g_1 g_2 \geq 1 \quad \text{(positiivinen haara)} \tag{12.2}$$

ja

$$g_1 g_2 \leq 0 \quad \text{(negatiivinen haara),} \tag{12.3}$$

missä siis $g_1 = 1 - d/R_o$ ja $g_2 = 1 - d/R_r$.

Asettamalla Fresnelin luku $a^2 / \lambda d$ ja suurennus M sopivasti voidaan valita tietty(jä) poikittaisia moodeja ja sulkea toisia pois. Fresnelin luvussa a on peilin säde.

Epästabiili konfokaali resonaattori

Epästabiililla konfokaalilla resonaattorilla on joko

$$R_r - R_o = 2d \tag{12.4}$$

(positiivinen haara) tai

$$R_r + R_o = 2d \tag{12.5}$$

(negatiivinen haara). Näillä konstruktioilla saadaan aikaan hyvin yhdensuuntainen ulostuleva lasersäde.

Negatiivisen haaran mukaisen konstruktion käytössä on ongelmana peilien yhteinen polttopiste, jonka kautta kulkee hyvin suuri säteilyteho. Tämä voi aiheuttaa vahinkoa käytetyssä väliaineessa, erityisesti jos se on kiinteää ainetta.

12.2. Q-KYTKENTÄ

Kun laserin pumppauksen seurauksena populaatioinversio on saavutettu, on saturaatiointensiteetin saavuttamiseen tarvittava aika yhtälön (7.65) mukaan

$$t_s = m\,[\eta_C (d - L) + \eta_L L] / c, \tag{12.12}$$

missä η_L ja η_C ovat taitekertoimet väliaineessa ja sen ulkopuolella, sekä m saturaatioon tarvittava lasersäteen väliaineen läpäisyjen lukumäärä. Tällöin on saavutettu stationäärinen tilanne, jossa säteen vahvistuminen ja sen häviöt ovat tasapainossa.

Tyypillisesti $t_s \approx 1 \ldots 1000$ ns, mikä on vähemmän kuin useiden lasertransitioiden alkutilojen elinaika τ_u. Tällaisessa tapauksessa populaatioinversio ei ehdi täysin kehittyä ennen lasertoiminnan stimuloidun emission alkamista.

Jos resonaattorin toiminta estetään pumppauksen aikana edellä kuvatun kaltaisessa tapauksessa, saadaan väliaineen energiatiheys nostetuksi merkittävästi korkeammaksi kuin stationäärisessä tilanteessa. Kun sitten resonaattorin toiminta ja säteen kehittyminen sallitaan, saadaan syntymään suuritehoinen lyhyt "jättiläispulssi", joka on seurausta väliaineen energian siirtymisestä stimuloidun emission kautta lyhyessä ajassa laservaloksi.

Tällaista pulssinmuodostustekniikkaa sanotaa Q-kytkennäksi, koska se perustuu resonaattorin Q-arvon yht'äkkiseen muuttamiseen pienestä suureksi. Q-arvo on resonaattorissa olevan lasersäteen vahvistuksessa saaman ja "häviöissä" menettämän energian suhde.

Pulssien tuottamiseksi Q-kytkennällä on täytettävä seuraavat neljä ehtoa:

1) Energian pumppaamiseksi

$$\tau_u > t_s . \tag{12.13}$$

2) Pumppausaika

$$T_p > t_s \tag{12.14}$$

ja mieluimmin

$$T_p > \tau_u . \tag{12.15}$$

3) Jos pumppauksen aikana alhainen Q-arvo aiheutetaan häviöillä vaimentamalla, niin

vaimennus > vahvistus.

4) Pulssin synnyttämiseksi Q-arvo on voitava muuttaa korkeaksi hyvin nopeasti, $\approx t_s$.

Tarkastellaan seuraavassa tarkemmin populaatioinversion (tai -eron) ja väliaineessa vahvistuvan säteen intensiteetin (tai fotonien lukumäärän) aikariippuvuuksia.

Tarkastellaan ensin häviöiden vaikutusta. Jos väliaineen vahvistus resonaattorissa olisi $g = 0$, mutta säteen häviöt yhden läpäisyn aikana L_F , vähenisi säteen energia relaation

$$dE/dt = -E / t_C \tag{12.16}$$

mukaisesti, missä sammumisaika

$$t_C = \eta d / cL_F . \tag{12.17}$$

Stationääriselle tilanteelle olisi voimassa (7.60)

$$R_1 R_2 (1 - a_1)(1 - a_2) \exp\{[g(\nu_0) - \alpha] 2L\} = 1,$$

joten jos $a_1 \approx a_2 \approx 0$, on häviöiden L_F vaikutus edestakaisella läpäisyllä esitettävissä muodossa

$$\exp[-2L_F] = R_1 R_2 \exp[-2\alpha L]. \tag{12.21}$$

Siten

$$L_F = \alpha L - \ln(R_1 R_2)^{1/2} \qquad (12.22)$$

ja

$$t_C = \eta d / c[\alpha L - \ln(R_1 R_2)^{1/2}]. \qquad (12.23)$$

Tarkastellaan seuraavaksi vahvistusta. Jos häviöitä ei olisi, niin vahvistus g_0 lisäisi intensiteettiä

$$dI/dz = g_0 I \qquad (12.25)$$

ja

$$dI/dt = dI/dz\, dz/dt = g_0 I\, c/\eta. \qquad (12.27)$$

Jos resonaattorin pituus d ei ole sama kuin väliaineen pituus L, niin

$$dI/dt = (g_0 Ic / \eta)\ (L/d). \qquad (12.28)$$

Kun vahvistus ja häviöt molemmat otetaan huomioon,

$$dI/dt = (g_0 IcL / \eta d) - I / t_C \qquad (12.30)$$

tai merkitsemällä

$$\tau = t / t_C \qquad (12.31)$$

voidaan kirjoittaa

$$dI/d\tau = I(g_0 / g_t - 1), \qquad (12.32)$$

missä

$$g_t = \eta d / cLt_C. \qquad (12.33)$$

Siten $g_t = g_0$ on kynnysvahvistus, jolla saadaan aikaan stationäärinen cw-lasertoiminta (continuous wave).

Tietyllä taajuudella säteen intensiteetti I on verrannollinen sen fotonien lukumäärään ϕ ja vahvistus g taas populaatioiden erotukseen $M = \Delta N_{u\ell} = g / \sigma_{u\ell}$. Siten (12.32) voidaan kirjoittaa muotoon

$$d\phi/d\tau = \phi(M / M_t - 1). \qquad (12.35)$$

Termi $\phi M / M_t$ on ajassa t_C syntyvien fotonien määrä, ja koska populaatioero $M = N_u - N_\ell$ muuttuu kahdella uuden fotonin emissiossa,

$$dM/d\tau = -2\, \phi M / M_t. \qquad (12.36)$$

Edellisten yhtälöiden perusteella voidaan kirjoittaa

$$d\phi/dM = d\phi/d\tau\, d\tau/dM = \phi(M / M_t - 1) / [-2\, \phi M / M_t]$$
$$= 1/2\, (M_t / M - 1). \qquad (12.37)$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\phi - \phi_0 = 1/2\, [M_t \ln(M/M_0) - (M - M_0)], \qquad (12.38)$$

sillä

Koska fotonien määrä aluksi ja lopuksi (ennen pulssia ja sen jälkeen) on nolla, $\phi_0 = \phi_f = 0$

Siis

$$M_f / M_0 = \exp[(M_f - M_0)/M_t] \quad (12.40)$$

ja se osa populaatioerosta, joka on muuttunut laserpulssin energiaksi on

$$(M_0 - M_f) / M_0 = 1 - \exp[(M_f - M_0)/M_t]. \quad (12.41)$$

Hetkellinen teho (keskimääräistettynä yli ajan t_C) on

$$P = \phi h\nu/t_C , \quad (12.42)$$

jonka suurin arvo saadaan ehdosta

$$d\phi/dM = 0,$$

josta yhtälön (12.37) mukaan seuraa $M = M_t$. Tällöin

$$P_{max} = h\nu/2t_C [M_t \ln(M_t/M_0) - (M_t - M_0)] \quad (12.44)$$

$$\approx M_0 h\nu/2t_C , \quad (12.45)$$

kun $M_0 >> M_t$.

Q-kytkennän toteuttaminen

- Pyörivät peilit

- Elektro-optiset sulkijat, joita ohjataan sähkökentällä
  - Pockels-kenno
  - Kerr-kenno

- Akusto-optinen sulkija

- Vähitellen kyllästyvä absorbaattori

12.3. MOODILUKITUS

Ns. moodilukitustekniikalla voidaan tuottaa äärimmäisen lyhyitä pulsseja, jopa fs:n luokkaan saakka. Tämä voidaan toteuttaa, jos laserissa värähtelevät useat pitkittäiset moodit voidaan lukita niin, että niiden vaihe-ero säilyy muuttumattomana. Pulssin muodostumista voidaan verrata sen esittämiseen Fourier-sarjana.

Tarkastellaan laserin moodeja, joiden amplitudit ovat likipitäen yhtä suuret E_0 ja

$$E_n(t) = E_0\, e^{i(\omega_n t + \phi_n)}. \qquad (12.46)$$

Jos moodeja on N kappaletta, niiden nuodostama yhteinen kenttä on

$$E(t) = E_0 \Sigma_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_n t + \phi_n)}. \qquad (12.47)$$

Moodien taajuuserot ovat

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi\, \Delta\omega = 2\pi\, (c/\eta\, /\, 2d) = \pi c\, /\, \eta d. \qquad (12.48)$$

Jos moodien vaiheet ϕ_n ovat satunnaisia, niin

$$I(t) = N\, E_0{}^2, \qquad (12.49)$$

mutta jos vaiheet saadaan lukituksi

$$\phi_n = \phi_0\,, \qquad (12.50)$$

niin

$$E(t) = E_0\, e^{i\phi_0} \Sigma_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_n t} \qquad (12.51)$$

$$= E_0 \Sigma_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_{N-1} - n\,\Delta\omega)\, t}, \qquad (12.53)$$

kun

$$\omega_n = \omega_{N-1} - n\, \Delta\omega. \qquad (12.52)$$

Tällöin

$$E(t) = E_0\, e^{i(\phi_0 + \omega_{N-1} t)} \Sigma_{n=0}^{N-1} e^{in\,\Delta\omega\, t}, \qquad (12.54)$$

Koska

$$E(t) = E_0\, e^{i(\phi_0 + \omega_{N-1} t)} [(e^{iN\,\Delta\omega\, t} - 1) / (e^{i\,\Delta\omega\, t} - 1)]. \qquad (12.56)$$

Tästä saadaan intensiteetti

$$I(t) = E_0{}^2\, [\sin^2(N\,\Delta\omega\, t / 2) / \sin^2(\Delta\omega\, t / 2)]. \qquad (12.57)$$

Intensiteetti siis oskilloi kulmataajuudella $N\,\Delta\omega\, t / 2$ ja amplitudina $E_0{}^2 / \sin^2(\Delta\omega\, t / 2)$. Amplitudi saa maksimiarvonsa, kun

$$\Delta\omega\, t / 2 = 0, \pi, 2\pi, \ldots\, . \qquad (12.58)$$

Siten peräkkäisten maksimien eli pulssien väli on

$$\Delta t_{sep} = 2\pi / \Delta\omega = 2\eta d / c. \qquad (12.59)$$

Maksimi intensiteetti saadaan, kun $t \rightarrow 0, \pi, 2\pi, \ldots$, jolloin $\sin^2 Nx / \sin^2 x \rightarrow (Nx)^2 / x^2 = N^2$ ja maksimi intensiteetiksi tulee

$$I_{max} = E_0{}^2 N^2 \qquad (12.61)$$

sekä pulssin kestoksi

$$\Delta t_p = 2\eta d / Nc = 1 / N\Delta\nu. \qquad (12.62)$$

Moodilukituksen toteuttaminen

Moodilukitus voidaan toteuttaa asettamalla resonaattoriin sulkija, joka avautuessaan asettaa kaikki moodit samaan vaiheeseen. Aktiivinen sulkija on modulaattori, jota ohjataan ulkoisella taajuudella $\Delta t = 2\eta d / c$. Passiivinen sulkija taas on kyllästyvä absorbaattori, jolloin saadaan samalla kertaa Q-kytkentä ja moodilukitus.

Aktiivinen lukitus

- Akusto-optinen kytkin

- Synkroninen pumppaus toisella moodilukitulla laserilla

Passiivinen lukitus

Ei tarvita ulkoista kontrollia

- CPM (colliding pulse mode-locking)

- APM (additive pulse mode-locking)

- KLM (Kerr lense mode-locking)

15. EPÄLINEAARISEN OPTIIKAN ILMIÖITÄ

Pääkohdat:
- polarisaatio voimakkaassa sähkökentässä
- toisen ja kolmannen kertaluvun epälineaarisia ilmiöitä

15.1. ANISOTROOPPISET KITEET

Useimmat materiaalit ovat optisesti isotrooppisia. Eräät kiteet ovat anisotrooppisia siten, että niiden taitekerroin riippuu valon kulkusuunnasta ja polarisaatiosta. Uniaksiaalisessa kiteessä on yksi suunta, ns. optinen akseli, jossa valon taitekerroin ei riipu polarisaatiosta. Biaksiaalisessa kiteessä tällaista suuntaa ei ole.

Kuutiolliset kiteet ovat isotrooppisia. Trigonaaliset, tetragonaaliset ja heksagonaaliset kiteet ovat uniaksiaalisia. Ortorombiset, monokliiniset ja trikliiniset kiteet ovat biaksiaalisia.

Uniaksiaalisessa kiteessä optisen akselin suunnassa etenevällä sm-aallolla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{2.48}$$

on vaihenopeus $v = \omega/k$ eri suuri etenemissuunnassa kuin sitä vastaan kohtisuorissa suunnissa. Taitekertoimen suunta- ja polarisaatioriippuvuus kytkeytyy aaltovektoriin $\mathbf{k}$.

Fotonin aaltovektori tai liikemäärä

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{15.3}$$

noudattaa liikemäärän säilymislakia taittumisilmiöissä (ja heijastuksissa).

15.2. POLARISAATIO

Anisotrooppisen materiaalin suskeptibiliteetti χ eli polarisoituvuus relaatiossa

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{2.6}$$

ei ole skalaari, vaan tensori, jonka komponenteista saadaan suunnasta ja polarisaatiosta riippuva taitekerroin.

Jos materiaalin polarisaatio ei riipu sähkökentästä lineaarisesti, vaan

$$P = \varepsilon_0 (\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + ...), \tag{15.4}$$

on materiaali epälineaarisesti polarisoituva eli optisesti epälineaarinen. Epälineaarisen polarisaation komponentit voidaan siis kirjoittaa

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E^2, \tag{15.5}$$

$$P_3 = \varepsilon_0 \chi_3 E^3 \tag{15.6}$$

jne., missä korkeamman kertaluvun polarisoituvuudet χ_2, χ_3, ... ovat ns. hyperpolarisoituvuuksia.

Toisen kertaluvun polarisaatiota ei esiinny materiaaleilla, joilla on inversiosymmetria (engl. centrosymmetric). Tyypillisesti

$$\chi_2 \approx 2 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^2/V^2} \tag{15.7}$$

ja

$$\chi_3 \approx 4 \times 10^{-23}\ \mathrm{m^3/V^3}. \tag{15.8}$$

15.3. TOISEN KERTALUVUN PROSESSEJA

TOISEN HARMONISEN (YLIÄÄNEN) SYNNYTTÄMINEN

Tarkastellaan sm-aallon

$$E = E_0\, e^{-i\omega t} + E_0^*\, e^{+i\omega t} \tag{15.9}$$

aiheuttamaa toisen kertaluvun polarisaatiota

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E^2 = \varepsilon_0 \chi_2 [E_0^2\, e^{-i2\omega t} + 2E_0E_0^* + E_0^{*2}\, e^{+i2\omega t}]. \tag{15.10}$$

Siitä nähdään, että P_2 oskilloi taajuudella 2ω, mikä aiheuttaa myös sm-aallon emission ko. taajuudella. Tämä on toisen harmonisen syntymekanismi (engl. second harmonic generation).

Toisaalta toisen harmonisen syntyminen merkitsee kahden fotonin absorptiota, ja yhden fotonin, jolla on kaksinkertainen energia, emittoitumista.

SUMMA- JA EROTUSTAAJUUKSIEN SYNTYMINEN

Samoin kuin edellä, sm-aaltojen

$$E_1 = E_{10}\, e^{-i\omega_1 t} + E_{10}^*\, e^{+i\omega_1 t}$$

ja

$$E_2 = E_{10}\, e^{-i\omega_2 t} + E_{10}^*\, e^{+i\omega_2 t} \tag{15.12}$$

vaikuttaessa epälineaarisessa väliaineessa samanaikaisesti

$$E = E_1 + E_2,$$

tulee toisen kertaluvun polarisaatioon

$$P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E^2 \tag{15.13}$$

taajuuskomponentit $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ ja $|\omega_1 - \omega_2|$. Nämä puolestaan synnyttävät sopivissa olosuhteissa vastaavan taajuisia sm-aaltoja.

15.4. KOLMANNEN KERTALUVUN PROSESSEJA

KOLMANNEN HARMONISEN SYNNYTTÄMINEN

Kun kirjoitetaan tuleva sm-aalto muotoon

$$E = E_0 \cos \omega t, \tag{15.14}$$

tulee väliaineen kolmannen kertaluvun polarisaatioksi

$$\begin{aligned} P_3 &= \chi_3 \varepsilon_0 E_0^3 \cos^3 \omega t \\ &= \chi_3 \varepsilon_0 E_0^3 [1/4 \cos 3\omega t + 3/4 \cos \omega t], \end{aligned} \tag{15.15}$$

josta nähdään taajuuden 3ω syntyminen. Tämä tapahtuu heikkona kaikissa aineissa: kaasuissa, nesteissä ja kiinteässä aineessa.

"Four-wave mixing"

KERR-ILMIÖ

Jos aineen taitekerroin riippuu valon intensiteetistä, voidaan se kirjoittaa muotoon

$$\eta(\omega) = \eta_0(\omega) + \eta_{2I}(\omega)\, I(\omega), \tag{15.16}$$

missä intensiteetistä riippuva osa

$$\eta_{2I}(\omega) \approx 9\pi/\eta_0(\omega)\ \chi_3 \tag{15.17}$$

on tyypillisesti luokkaa 10^{-20} m^2/W.

Jos tatekerroin kasvaa intensiteetin kasvaessa on seurauksena itsefokusoituminen (Kerr-linssi).

15.5. OPTISESTI EPÄLINEAARISET MATERIAALIT

Tavallisimmin käytetyt optisesti epälineaariset materiaalit ovat läpinäkyviä kiteitä, oksideja tai fosfaatteja. Esim. KDP.

15.6. "PHASE MATCHING"

Uusia taajuuksia synnytettäessä on ns. vaiheistuksella (engl. phase matching) huolehdittava siitä, että väliaineen eri kohdissa syntyvät aallot vahvistavat toisiaan (konstruktiivinen interferenssi). Näin yleensä ole, koska väliaineen taitekerroin muuttuu taajuuden funktiona. Tavallisin tapa destruktiivisen interefrenssin välttämiseksi on polarisaatiotason kääntäminen.

Vaiheistusehto voidaan kirjoittaa muotoon2ω

$$\mathbf{k}_{2\omega} = 2\,\mathbf{k}_{\omega}.$$

15.7. KYLLÄSTYVÄ ABSORBAATTORI

Absorption kyllästymisen aiheuttama läpinäkyvyys (engl. bleaching) voidaan katsoa myös epälineaariseksi ilmiöksi. Kyllästyminen on seurausta siitä, että suurella intensiteetillä kaikki kyseiselle taajuudelle sopivat viritykset tapahtuvat nopeasti eikä sen jälkeen kyseinen taajuus voi enää absorboitua.

Ilmiötä käytetään mm. Q-kytkennän ja moodilukituksen toteuttamisessa. Sillä saadaan toteutetuksi myös optinen bistabiilisuus.

15.8. KAHDEN FOTONIN ABSORPTIO

Viritys voi tapahtua myös niin, että kaksi fotonia absorboituu yhtä aikaa, jos niiden yhteenlaskettu energia sopii viritysenergiaksi. Kahden fotonin absorption todennäköisyys on pieni, mutta se kasvaa valon intensiteetin myötä. Siten myös se on epälineaarinen ilmiö.